پژوهش عملیاتی ۲

مدرس: سیروس کلوانی


بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: تحقیق در عملیات و ارتباط آن.. ۴
فصل دوم: برنامه ریزی خطی(روش هندسی)...۱۱
فصل سوم: برنامه ریزی عدد صحیح... ۳۷
فصل چهارم: برنامه ریزی خطی(شکل ماتریسی تابلوی سیمپلکس) ۴۶
فصل پنجم: مفاهیم اولیه ماتریس در استفاده... ۵۰
فصل ششم: روش سیمپلکس تجدیدنظرشده(اصلاح شده) ۵۵
فصل هفتم: تفسیر اقتصادی جداول سیمپلکس ۶۱
فصل هشتم: مسأله ثانویه... ۷۰
فصل نهم: برنامه ریزی خطی (تحلیل حساسیت) ۸۶
فصل دهم: کنترل موجودی انبار.. ۹۰
فصل یازدهم: تخصیص (واگذاری کار)..۹۷
فصل دوازدهم : مدل حمل و نقل..۱۰۵
فصل سیزدهم: تحلیل شبکه CPM, PERT ۱۲۰
منابع.. ۱۳۶

فصل اول

تحقیق در عملیات و ارتباط آن با تصمیم گیری

تحقیق در عملیات و ارتباط آن با تصمیم گیری

اهداف

در این فصل دانشجویان با تعریف تحقیق در عملیات و ارتباط آن با تصمیم گیری ، انواع تصمیم گیری و همچنین تعریف برنامه ریزی ،هدف ها و محاسن ومعایب برنامه ریزی ، فرآیند تصمیم گیری و حل مسائل تحقیق در عملیات آشنا خواهند شد.

تعریف تحقیق در عملیات یا OR

به مجموعه ای از روشهای علمی و فنونی گفته می شود که جهت شناخت مسائل درون سازمان به کار می روند و در صدد جواب بهینه برای مسائل هستند. و یکی از مهمترین ابزارهای مدیران جهت تصمیم گیری بهتر می باشد.

در واقع نقش اساسی OR را می توان در جنگ جهانی دوم دید که باعث شد آمریکا، آمریکا شود. هدف OR بهینه سازی است با زمان بهینه، هزینه بهینه و ...

OR کل سیستم را با هم می بیند و فقط به یک موضوع رسیدگی نمی کند.

برای حل مسائل به کمک OR مراحل ذیل را انجام می دهیم:

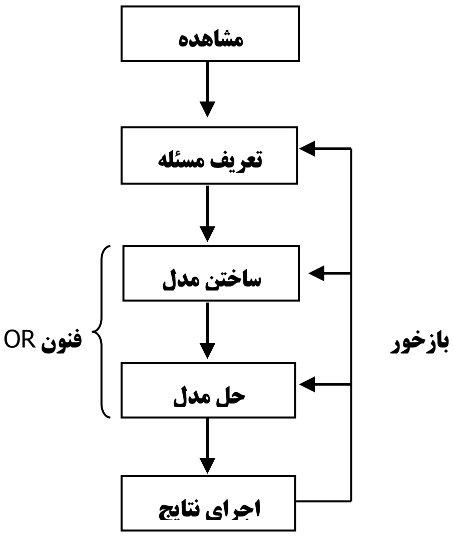
۱- مشاهده

۲- تعریف مسئله (داده های مسئله را بیرون می آوریم)

۳- ساختن مدل

۴- حل مدل

۵- اجرای نتایج



ممکن است به دلیل اشتباه حل کردن مسئله یا اشتباه ساختن مدل نتایج اشتباه باشد که یا اصلاً مسئله اشتباه تعریف شده باشد که به این ها بازخور می گویند و از هر جا که اشتباه شده باشد مسئله مجدداً باید اجرا شود.

ساختن مدل

مهمترین کار ما ساختن مدل است. چرا که حل مدل که با کامپیوتر انجام می شود و مشاهده و تعریف مسئله هم که کارهای ابتدایی می باشند.

مدل در OR

بیان خلاصه ای از یک مسئله در دنیای واقعی و سازمانی است. مدل می تواند در قالب یک شکل یا نمودار بیان گردد. اما اغلب در OR مدل شامل مجموعه ای از روابط ریاضی خواهد بود. مدل خلاصه ای از یک واقعیت است مثل ماکت یک هواپیما…

تصمیم گیری

تصمیم گیری و مدیریت را می توان مترادف هم دانست یا جنبه اصلی مدیریت را تصمیم گیری به حساب آورد.

تعریف تصمیم گیری

تصمیم گیری فرآیندی را تشریح می کند که از طریق آن راه حل مسأله معینی انتخاب می گردد.

نوع تصمیم با سطوح سازمان در ارتباط است . هرقدر به طرف بالاتر سازمانی برویم تصمیمات ، غیر برنامه ریزی شده و استراتژیک خواهد بودو برعکس ، تصمیمات معمولی ، تکراری و جزئی مربوط به سطوح پایین سازمان است.

انتخاب

به مجموعه فعالیت های فرد برمی گردد که موجب انتخاب یک بدیل از مجموع بدیل ها می شود. بنابراین انتخاب کردن جزئی از تصمیم گیری است.

رویه ها

رویه عبارت است از تعیین مراحل یا گامهای متوالی پیوسته برای انجام یک وظیفه ، مثلاً باید برای ثبت نام در هر نیمسال تحصیلی طبق رویه دانشگاه عمل کرد.

روش ها

روش ها عبارت است از تعیین چگونگی انجام هریک از مراحل رویه.

مقررات

مقررات بیانه ای صریحی است که به مدیر می گوید چه کاری را باید و چه کاری را نباید انجام دهد.

انواع تصمیم گیری

۱- تصمیم های برنامه ریزی شده:

تصمیم هایی هستند که بر حسب عادت، قانون یا رویه اخذ می گردند و برای مسائل ساده و پیچیده به کار می روند . هر چه تصمیم ها نامنظم تر، جدیدتر و دارای نتایج عمده ای باشد، یا به بیان دیگر پیچیده تر باشد و تعهدات عمده ای را در برداشته باشد به همان نسبت هم تبدیل آنها به شکل برنامه ریزی شده دشوارتر است.

البته تصمیم های برنامه ریزی شده تا حدی آزادی مدیر را محدود می سازد زیرا سازمان به جای فرد تصمیم می گیرد که چه باید کرد به هر حال تصمیم های برنامه ریزی شده وقت مدیر را برای پرداختن به مسائل عمده تر آزاد می کند.

۲- تصمیم های برنامه ریزی نشده:

تصمیم هایی هستند که با مسائل غیرمعمول و منحصر به فرد سروکار دارند. در واقع مدیر در برابر اکثر مسائل عمده ای که با آن رو به رو است ناچار به اخذ تصمیم گیری برنامه ریزی نشده می باشد.

خط مشی های مکتوب و غیرمکتوب سازمان موجب تسهیل تصمیم گیری می شود زیرا بعضی از بدیل ها را حذف یا محدود می کند. هر چه فرد در سلسله مراتب سازمانی بالاتر رود داشتن توان اخذ تصمیم های برنامه ریزی نشده اهمیت بیشتری می یابد زیرا بیشتر تصمیم هایی که باید بگیرد برنامه ریزی نشده اند.

سطوح مدیریتی و تصمیمات

مدیران سطوح پایین تر اساساً با مشکلات تکراری و آشنا مواجه هستند، بنابراین بیشتر بر تصمیمات برنامه ریزی شده نظیر سیاست عملیات استانداردتکیه می کنند.

با ارتقای مدیران در سلسه مراتب سازمان ها، مشکلات روی این مدیران بیشتر با ساختار های بد هستند چرا؟

زیرا مدیران سطح پایین خودشان تصمیمات روزانه را اتخاذ می کنند و تنها تصمیماتی را که منحصر به فرد و مشکل می باشند به بالا ارجاع می دهند مدیران نیز تصمیمات روز مره را به کارکنان خود منتقل می کنند تا وقت خود را بیشتر برای مسائل مشکل تر صرف کنند.

موقعیت های تصمیم گیری

مدیران در تعیین چگونگی برخورد با مشکلات موقعیت هایی را در نظر می گیرند.

۱. **موقعیت اطمینان:** در وضعیت اطمینان می دانیم که در آینده چه رخ خواهد داد. در این موقعیت اطلاعات مورد اطمینان قابل اندازه گیری و دقیقی وجود دارد تا بر اساس آن تصمیم گیری شود. این نوع تصمیم گیری در محدوده ی مدیران خط اول یا سطح سرپرستی قرار می گیرد. مثلاً برای تولید

بیشتر نوعی خاص از محصول ، نیاز به اضافه کاری تعداد کارگران مربوط به آن نوع کالا است. در این نوع تصمیم ساعت اضافه کار، تعداد محصول مورد نیاز و هزینه آن مشخص است، بنابراین تصمیم گیری در این مورد ساده است.

۲. **موقعیت مخاطره (ریسک):** در وضعیت مخاطره میزان احتمال هر گونه نتیجه ممکن معین است. به عبارت دیگر اطلاعات کامل موجود نیست و قابلیت پیش بینی کمتر است. ریسک معمولا حد وسط وضعیت مطمئن و نا مطمئن است.

۳. **موقعیت عدم اطمینان:** در وضعیت عدم اطمینان میزان احتمال نتیجه گرفتن ممکن و حتی نتیجه را نمی دانیم به عبارت دیگر اطلاعات ما نسبت به موضوع ناچیز است.

مثلاً اگر روزنامه فردا امروز به دستمان برسد بسیاری از حوادث مندرج درآن اتفاق نمی افتد، به هرحال تصمیم گیری در وضعیت عدم اطمینان بیشتر به ترکیبی از *تحقیق* ، *تجربه و گمان* مبتنی است.

روشها و فنون معین تصمیم گیری: روشها و فنونی که از طریق تحقیق و تجربه به دست آمده اند و می توانند در مراحل مختلف فرآیند تصمیم گیری مورد استفاده قرار گیرند عبارتند از:

۱. **تفکر خلاق:** داشتن فکر خلاق که در مرحلهٔ دوم فرآیند اخذ تصمیم دارای ارزش ویژه ای است از مؤثرترین ویژگی های یک مدیر خوب است. استفاده از تفکر خلاق بستگی به توانایی فرد دارد.

۲. **تحقیق در عملیات:** تحقیق در عملیات به جای آنکه مسأله را منحصر به یک واحد بداند در بهینه کردن نتایج کلی سازمان تلاش می کند. این روش به یک گروه تحقیقاتی نیاز دارد تا تمام جنبه های مسأله را مورد بررسی قرار دهند.

۳. **استراتژیها و مفاهیم زیربنایی:** هر فرد یک چارچوب ادراکی دارد که در اخذ تصمیم در جریان کار و زندگی روزانه اش به وی کمک می کند. ایجاد و گسترش این چارچوب صرفاً از طریق تجربه- اگر چه کسل کننده و وقت گیر است- فرآیند مؤثری است برای تسریع این فرآیند، تصمیم گیرنده باید با مفاهیم واستراتژیهای معین آشنا شوند که از تجربیات دیگران حاصل شده و در بعضی موارد از طریق تحقیق، کنترل شده است.اساس برنامه ریزی بر آگاهی از فرصتها و تهدیدهای آتی و چگونگی استفاده از فرصتها و مبارزه با تهدیدها قرار دارد.

تعریف برنامه ریزی

از زمانی که بشر به فردا ی خود اندیشید ، برای آینده هدف تعیین کردو بدین ترتیب ، فرآیند برنامه ریزی آغاز شد.برنامه ریزی گذر از یک گام به گام دیگر نیست بلکه فرآیندی خلاق است و می تواند پیش از تصمیم نهایی چندین مرتبه تغییر و باز بینی گردد.

برنامه ریزی عبارت است از:

۱) تعیین هدف یافتن و ساختن راه وصول به آن.
۲) تصمیم گیری در مورد اینکه چه کارهایی باید انجام گیرد.
۳) تصمیم گیری در مورد تجسم و طراحی وضعیت مطلوب در آینده و یافتن و ساختن راهها و وسایلی که رسیدن به آن را فراهم کند.
۴) طراحی عملیاتی که شیئی یا موضوعی را بر مبنای شیوه ای که از پیش تعریف شده، تغییر بدهد.

تعریف اصل برنامه ریزی

برای دست یافتن به هدف مورد نظر، باید قبل از تلاش فیزیکی یا اقدام به انجام کار، تلاش ذهنی یا برنامه ریزی کافی صورت بگیرد.

هدفهای برنامه ریزی

هدفهایی که در هر برنامه ریزی دنبال می شود به شرح ذیل است:

۱) افزایش احتمال رسیدن به هدف از طریق تنظیم فعالیتها.
۲) افزایش جنبهٔ اقتصادی (مقرون به صرفه بودن عملیات).
۳) تمرکز بر روی مقاصد و اهداف.
۴) تهیه ابزاری برای کنترل.

اولویت برنامه ریزی

اگر وظایف مدیریت را حول رئوس هرمی در نظر بگیریم برنامه ریزی در راس آن قرار می گیرد و اگر چه وظایف مدیریت را به طور جداگانه بررسی می کنیم، ولی همه به هم مرتبط اند و در این بین برنامه ریزی از اهمیت و اولویت خاصی برخوردار است و بخش اعظم کار یک مدیر را برنامه ریزی تشکیل می دهد.

محاسن برنامه ریزی

برنامه ریزی در هر سازمان محاسن زیادی دارد که مهمترین آنها به شرح ذیل است:

۱) اهداف هر سازمان را فقط در چارچوب برنامه ریزی می توان تحقق بخشید.
۲) برنامه ریزی، زمینه را برای اجرای تصمیم ها فراهم می کند.

۳) برنامه ریزی ما را به طور مستقیم به سوی رشد اقتصادی کلان می برد و از هدر رفتن عوامل تولید جلوگیری می کند.
۴) برنامه ریزی موجب بودجه بندی می گردد و در نتیجه ابزار کنترل را به دست مدیر می دهد.
۵) برنامه ریزی روحیهٔ گروهی را بالا می برد و در نتیجه کارایی سازمان را افزایش می یابد.

محدودیت های برنامه ریزی

علی رغم محاسن زیادی که برنامه ریزی دارد، محدودیت هایی را نیز به همراه دارد که عبارتند از:

۱) با توجه به صرف هزینه و وقت، تعهدی برای تحقق اهداف به دست نمی دهد.
۲) به علت صرف هزینه و وقت ، سازمان های کوچک از انجام عمل برنامه ریزی خودداری می کنند.
۳) حرکت را در تمام سطوح سازمان در کوتاه مدت مشکل یا کند، میکند.
۴) برنامه ریزی بیشتر بر اساس احتمالات و حدس است تا بر یقین .

راههای کاهش محدودیت های برنامه ریزی

۱) تا سر حد امکان از برنامه ریزی های وابسته به هم خودداری شود.
۲) از برنامه ریزی موازی در زمینه های گوناگون، بر اساس ضابطه ی خاص کمتر شود.
۳) سعی شود برنامه ها هماهنگ با یکدیگر و یکنواخت پیش بروند.
۴) برنامه ها مرحله به مرحله اجرا شود.

– برنامه ریزی خطی(LP)

تخصیص منابع محدود به فعالیت های تعریف شده جهت افزایش بازدهی و یافتن بهترین راه حل بهینه را برنامه ریزی خطی می گویند در واقع برنامه ریزی خطی نوع ساده ای از مدل برنامه ریزی ریاضی می باشد که بهترین گزینه را از میان روشهای ممکن انتخاب می کند در برنامه ریزی خطی تابع هدف و محدودیت ها همگی به صورت خطی نمایش داده می شود.

– تحقیق در عملیات

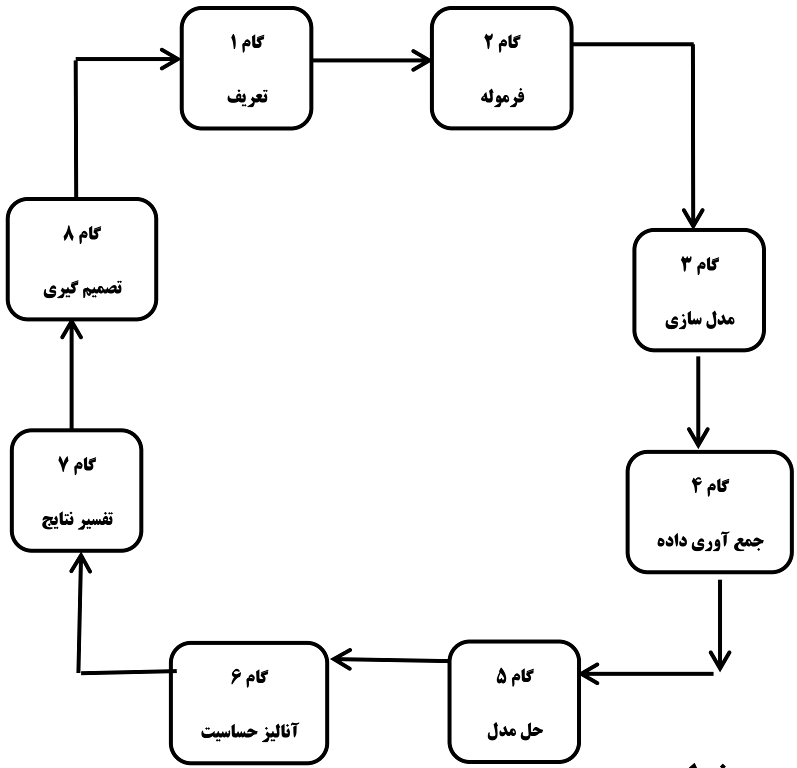
مجموعه ای از مدلها و تکنیک های کمی که از طریق روشهای علمی، مدیران را در امر تصمیم گیری در شرایط منابع محدود یاری می دهد.

ویژگی های اساسی تحقیق در عملیات به صورت ۴ مورد زیر است:

۱) روش سیستماتیک
۲) استفاده از مدل های علمی و ریاضی
۳) استفاده از متخصصان
۴) ایجاد و یا بهینه سازی جوابهای ممکن

فرآیند تصمیم گیری و حل مسائل تحقیق در عملیات

فرآیند تصمیم گیری و حل مسائل تحقیق در عملیات ،در ۸ گام زیر قابل اجرا می باشد که گام های ۱ و ۲ به فعالیت ها ی قبل از مدل سازی، گام های ۳تا ۶ به فعالیت (OR) در حل مسائل تحقیق در عملیات های حین مدل سازی و گام های ۷ و ۸ به فعالیت های بعد از مدلسازی طبقه بندی می شود. این فرآیند در شکل زیر آورده شده است.



بخش های اصلی برنامه ریزی خطی

1. **تابع هدف(**objective functon**)**

عملکرد مدل می باشد، (Min**) یا حداقل نمودن (**Max**) بیانگر حداکثر کردن می باشد.**

۱) محدودیت های کارکردی (قیود)

بیانگر محدودیت های منابع جهت رسیدن به اهداف مدل می باشد که به صورت بزرگتر مساوی (≥)، کوچکتر مساوی(≤) و یا مساوی (=) نمایش داده می شود.

۲) محدودیت های غیر کارکردی یا متغیرتصمیم

این متغیرها می توانند به صورت مثبت، به ندرت منفی و یا آزاد در علامت (X_j) نشان دهنده مقدار عملکرد یا سطح یک فعالیت بوده و با علامت مورد استفاده قرار گیرند. متغیر آزاد در علامت متغیری است که می تواند مقادیر منفی، مثبت و یا صفر را شامل شود. در یک مدل هرچه تعداد محدودیت ها کمتر باشد حجم محاسبات جهت حل مسئله کمتر خواهد بود.

فصل دوم

برنامه ریزی خطی (روش هندسی)

برنامه ریزی خطی (روش هندسی)

اهداف

در این فصل دانشجویان با مفروضات برنامه ریزی خطی و شیوه حل ترسیمی مسائل دو متغیره آشنا خواهند شد. همچنین در این فصل دانشجویان باید بتوانند موارد خاص برنامه ریزی خطی را در حالت ترسیمی تشخیص دهند.

مقدمه

شروع برنامه ریزی خطی در سال ۱۹۴۱ با تحقیقات اقتصاددانان معروف لئونتیف (W.W Leontief) همراه می باشد. همزمان با وی دانشمند دیگری بنام هیچکاک (Hitchcock) مدل حمل و نقل را به طریق برنامه ریزی خطی تفسیر نمود و همین تفسیر در سال ۱۹۴۷ توسط کوپ منز (Koopmans) انجام گرفت...که در بخش های بعدی به آن خواهیم پرداخت.

سه قدم اساسی برای استفاده از فن برنامه ریزی خطی وجود دارد:

قدم اول: مساله باید به گونه ای تعریف شود که با استفاده از فن برنامه ریزی خطی قابل حل باشد.

قدم دوم: مساله باید در قالب یک مدل ریاضی فرموله شود.

قدم سوم: اینکه مدل باید با استفاده از فن ریاضی « قطعی و معین» قابل حل باشد.

به عبارت دیگر فن برنامه ریزی خطی یکی از مهمترین فنون OR در شرایط تصمیم گیری قطعی (غیر احتمالی) است.

توسعه برنامه ریزی خطی را در زمره مهمترین پیشرفت های علمی اواسط قرن بیستم به حساب می آورند، و باید قبول کرد که این ارزیابی بی مورد نیست. زیرا تاثیر آن در زمینه های مختلف از سال ۱۹۵۰ میلادی تا امروز فوق العاده بارز بوده است. برنامه ریزی خطی ، اکنون دیگر از جمله ابزار های متعارفی است که باعث صرفه جویی هزاران تا میلیونها ریال برای واحد های صنعتی و بازرگانی می شود و استفاده از آن در سایر بخش های جامعه نیز به سرعت رو به گسترش است. در حال حاضر می توان گفت که حدود یک چهارم کل محاسبات علمی که توسط رایانه انجام می گیرد به برنامه ریزی خطی و مشتقات آن مربوط می شود.

مفروضات برنامه ریزی خطی :

یک مدل برنامه ریزی ریاضی در صورتی خطی است که دارای مفروضات زیر باشد:

1. **فرض تناسب (Proportionallty)**
2. **فرض جمع پذیری (Additivity)**
3. **فرض بخش پذیری(Divisibility)**
4. **فرض معین بودن(Deterministic)**

۱) فرض تناسب :

منظور ازتناسب ، این است که هرفعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیت ها عمل می کند. به عبارت دیگر، آهنگ تغییر یا شیب رابطه، تابعی ثابت است. بنابراین چنانچه متغیر تصمیم برابر مقداری تغییر کند، مقدار تابع نیز دقیقاً به همان نسبت تغییر می کند.

به عنوان مثلاً موردی را در نظر بگیرید که $a_{11} = ۵$ و $x_1 = ۲$ و $x_1 = ۱۰$. a_{11} باشد. اگـر x_1 به مقدار ۵٪ افزایش یـابـد (X_1=۲/۱) مقدار تابع نیز ۱۰/۵ می شود که دقیقاً ۵٪ افزایش یافته است. این خصوصیت همواره برای محدودیت های مدل و تابع هدف برقرار است.

۲) فرض جمع پذیری :

این فرض بیانگر این واقعیت است که باید روابط ریاضی بین متغیرها در مدل (چه در تابع هدف و چه در محدودیت ها) به صورت جمع جبری بیان گردد. بنابراین در مدل برنامه ریزی خطی، هیچگاه حاصلضرب دو متغیر دیده نمی شود. بعنوان مثال به رابطه زیر توجه کنید:

رابطه ۱:

$$\mathbf{3X_1 + 5X_1 - X_1.X_2 \leq 50}$$

رابطه ۲:

$$\mathbf{3X_1 + 5X_1 - X_3 \leq 50}$$

رابطه ۱ یک رابطه غیر خطی است، چون حاصلضرب X_1 و X_3 ($X_1 . X_3$)در آن استفاده شده است . درحالی که رابطه ۲ یک تابع خطی است، چون X_1 ، X_2، X_3 بصورت جمع جبری بیان شده است.

۳) فرض بخش پذیری:

این خصوصیت برنامه ریزی خطی به واقعیت « غیرعدد صحیح » (Non- Integer) بودن متغیرهای تصمیم (X_j) در مدل وجود دارد.در مدل برنامه ریزی خطی متغیر های تصمیم هرمقدار دلخواهی (چه عدد صحیح – چه غیر عدد صحیح) می توان در جواب نهایی مساله داشته باشند. در برخی از مدل های طراحی شده برای مسائل واقعی متغیر های تصمیم صرفاً مقدار صحیح می توانند داشته باشند .

به عنوان مثال اگر مساله فرموله شده بیانگر ترکیب بهینه تعداد تولید «یخچال» باشد. در این صورت X فقط می تواند مقادیر صحیح داشته باشد و مقدار اعشار برای متغیر معرف تعداد تولید یخچال بی معنا خواهد بود. بنابراین مدل فوق الذکر اگر چه ممکن است تمام مفروضات دیگر برنامه ریزی خطی را داشته باشد ولی « عدد صحیح » بودن مقادیر تولید به معنی نقض مدل عمومی برنامه ریزی خطی است. بنابراین فرض بخش پذیری به معنای آن است که هر واحد فعالیت به هر کسر دلخواه قابل تقسیم است و لذا متغیر های تقسیم می توانند مقادیر غیر صحیح نیز داشته باشند.

این خصوصیت مدل برنامه ریزی خطی براساس محدودیت های غیر منفی مدل عمومی LP $(X_1, X_2 , \dots X_n) \geq ۰$ تضمین می شود.

۴) فرض معین (قطعی) بودن:

بدین معنی است که کلیه پارامترهای(C_j . b_i . a_{ij}) مدل عمومی برنامه ریزی خطی در افق برنامه ریزی مقادیر ثابتی هستند. اگر چه تعیین پارامترهای مدل در اکثر مواقع به طور قطعی امکان پذیر است ولی در برخی موارد افق برنامه ریزی آنقدر بلند مدت است که مقادیر پارامترها دستخوش تغییر می شوند. در چنین مواقعی می توان از فن « تحلیل حساسیت» Sensitivity Analysis برای بررسی تاثیر تغییرات بر جواب بهینه مدل استفاده کرد.

بیان ریاضی مدل برنامه ریزی خطی:

در این بخش می‌توان مسئله شرکت تولید درب و پنجره را تعمیم داد. در این مسئله ۳ کارگاه یا منبع با محدودیت ظرفیتی وجود دارند که باید دو محصول با توجه به نیازشان از این سه منبع استفاده کنند. اکنون فرض کنید m منبع را می خواهیم به n محصول رقیب تخصیص دهیم. فرض کنید که xj حجم محصول j و Z معیار کارآمدی کلیه محصول‌های تولید شده است. همچنین فرض کنید تغییر کارآمدی یا Z در اثر هر واحد افزایش xj (j=1,…,n) باشد. وهمچنین bi نشان دهنده مقدار موجود منبع i (i=1,…,m) و بالاخره aij نشانگر مقداری از منبع i است که توسط محصول j مصرف می‌شود. خلاصه اطلاعات در جدول زیر آمده است.

محصول منبع	**میزان مصرف از منابع به ازای هر واحد از محصول** **۱ ۲** n				**مقدار موجود از منبع**
۱ **۲** . . . M	a_{11} a_{22} . . . a_{m1}	a_{12} a_{21} . . . a_{m2}	– – – am_3	a_{1n} a_{2n} . . . a_{mn}	B_1 b_2 . . . b_m
مقدار تغییر به ازای هر واحد افزایش محصول	c_1	c_2	...	$...C_n$	
میزان تولید محصول	x_1	x_2	...	xn	

مدل فوق را شکل استاندارد مسئله برنامه‌ریزی خطی می نامیم.

با توجه به جدول بالا می‌توان فرم کلی مسئله تخصیص منابع را به زبان ریاضی به صورت زیر بیان کرد:

$$
\begin{cases}
\text{Max } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n \\
\text{s.t.} \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
. \\
. \\
. \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
X_1 \geq 0 ,\ X_2 \geq 0 , \cdots , X_n \geq 0
\end{cases}
$$

مدل فوق را شکل استاندارد مسئله برنامه‌ریزی خطی می نامیم. هر مسئله‌ای که به شکل فوق باشد یک مسئله برنامه‌ریزی خطی است.

توجه : این شکل استاندارد در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرد و در سایر منابع شکل‌های دیگری به عنوان فرم استاندارد تعریف می‌شود.

واژه‌های مربوط به مدل برنامه‌ریزی خطی

برای سادگی در بیان مسائل در برنامه‌ریزی خطی، واژگان متداول به صورت زیر تعریف می‌شود.

تابع هدف :(objective function) به تابع $c_1x_1+c_2x_2+ \dots +c_nx_n$ که پیدا کردن حداکثر آن مورد نظر است اطلاق می‌شود.

محدودیت کارکردی :(functional constraint) به تابعی که نشان دهنده میزان کل مصرف هر منبع برای کلیه محصول ها است اطلاق می‌شود.

محدودیت نامنفی بودن :(non-negativity constraint) به روابط $x_j \geq ۰$ اطلاق می‌شود.

محدودیت‌ها :(constraints) به مجموعه محدودیت‌های کارکردی و نامنفی بودن اطلاق می‌شود.

متغیرهای تصمیم :**(decision variables)** به متغیرهای x_j که میزان هر محصول را نشان می‌دهد اطلاق می‌شود.

پارامترها :**(parameters)** به داده‌های a_{ij} ، c_j، b_i اطلاق می‌شود.

جواب : (Solution) هرمجموعه مقدار اختصاص داده شده به متغیر های تصمیم جواب نامیده می شود.

جواب موجه: (Feasible solution) جوابی که در تمام محدودیت ها صدق کند.

جواب بهینه: (Optimal solution) جواب موجه ای که به ازاء آن تابع هدف به بهترین جواب خود می رسد.

منطقه ی موجه: (Feasible Revigion) مجموعه جواب های موجه ، منطقه ی موجه را تشکیل می دهند.

جواب گوشه ای:(Corn point Solution) مقادیر متغیرهای تصمیم که از طریق تقاطع معادلات محدودیت ها به دست می آید.

نکته : ممکن است مدل استاندارد با بسیاری از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی در واقعیت تفاوت داشته باشد. شکل‌های مجاز دیگر از مسئله برنامه‌ریزی خطی که امکان تبدیل به شکل استاندارد را دارد به صورت زیر است:

- ممکن است به جای حداکثر کردن(Max) ، حداقل کردن (Min) در نظر باشد.
- ممکن است برخی از محدودیت‌های کارکردی به صورت بزرگتر ، مساوی $\geq$ باشند.

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+ \dots +a_{in}x_n \geq b_i$$

- ممکن است برخی از محدودیت‌های کارکردی به صورت تساوی (=) باشند.

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+ \dots +a_{in}x_n = b_i$$

– ممکن است برخی از متغیرهای بتوانند فقط منفی یا هم منفی یا مثبت (آزاد در علامت یا unrestricted in sign)باشند.

مدیر هر سازمانی معمولاً در صدد یافتن بهترین راه حل نیل به یک هدف با عنایت به محدودیت های درون سازمانی و برون سازمانی است. محدودیت های ایجاد شده برای سازمان ها و مدیران می تواند ناشی از محدودیت منابع همانند نیروی کار ، مواد اولیه ، انرژی یا بودجه باشد.یکی از اهداف اساسی هرسازمانی نیل به حداکثر سود می باشد. به عبارت دیگر ، مدیر درصدد «حداکثر کردن» سود موسسه می باشد. از طرف دیگر بخشی از واحد های سازمان مانند واحد تولید و یا بسته بندی نیز هستند که درصدد «حداقل کردن» هزینه های خود می باشند . یکی از مهمترین فنون تحقیق در عملیات که به مدیران کمک می کند با توجه به محدودیت های موجود به هدف خود در شکل بهینه نایل آیند ، فن «برنامه ریزی خطی» (Lp) می باشد.که در تحقیق در عملیات (۱) بخش هایی از آن بیان گردید و در ادامه این فصل به موارد ذیل خواهیم پرداخت:

1. **فرموله کردن مسئله به صورت برنامه ریزی خطی**
2. **برنامه ریزی خطی (روش هندسی)**
3. **موارد خاص در برنامه ریزی خطی**

۱) فرموله کردن مسئله به صورت برنامه ریزی خطی

این بخش را با فرمول بندی یک مثال کوچک برنامه ریزی خطی ادامه می دهیم. این مثال به اندازه کافی ساده است که می توان آن را به صورت گرافیکی مورد بررسی قرارداد.

مساله۱-۲: یک شرکت تولیدی درب و پنجره، دارای سه کارگاه است.

در کارگاه ۱، قاب های آلومینیومی و قسمت های فلزی تولید می شود.

در کارگاه۲، قاب های چوبی تولید می شود.

و در کارگاه ۳ ، برش شیشه و سوار کردن آن به قاب ها انجام می شود.

مدیریت این کارگاه ها به دنبال تولید دو محصول جدید هستند و از مرکز تحقیق در عملیات خواسته اند که میزان تولید از هر محصول را با توجه به ظرفیت کارگاه چند واحد است؟ محصول ۱، دری با قابی آلومینیومی و محصول ۲ پنجره ای شیشه با قاب چوبی است. با توجه به این که هر دو محصول،برای جوشکاری نیاز به کارگاه ۳ دارد، ظرفیت این کارگاه باعث می شود که رقابتی بین این دو محصول ایجاد شود. در جدول زیر سود هر محصول، میزان استفاده از منابع و ظرفیت هر کارگاه آورده شده است.

ظرفیت موجود (در هر دقیقه)	ظرفیت لازم برای تولید هر واحد ۲		محصول / کارگاه
۴	۰	۱	۱
۱۲	۲	۰	۲
۱۸	۲	۳	۳
	۵	۳	سود هر واحد

x_1 و x_2 به ترتیب تعداد محصولات ۱ و ۲ در هر دقیقه است و Z نشان دهنده سود حاصل از فروش در هر دقیقه می باشد.

در ادبیات تحقیق در عملیات به x_1 و x_2 متغیرهای تصمیم گیری (decision variables) و Z را تابع هدف (objective function) می گویند. برای تولید هر واحد محصول۱، ۱ واحد از کارگاه ۱ مصرف می شود که در هر دقیقه کارگاه ۱تنها ۴ واحد ظرفیت برای محصول جدید موجود دارد.

این محدودیت به صورت جبری $x_1 \leq 4$ نمایش داده می شود. به طور مشابه برای کارگاه شماره۲، محدودیت $2x_2 \leq 12$ بـرای محصول ۲ مـورد نیاز است. ظرفیت کارگـاه۳ تـوسط هر دو محصـول استفاده می شـود که باعث محـدودیت..... $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ می شود. چون محصول ها نمی توانند منفی باشند، متغیرهای تصمیم گیری نامنفی هستند و نمایش ریاضی آن به صورت $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$ می شود. به طور خلاصه نمایش ریاضی مدل برنامه ریزی خطی این مسئله به صورت زیر می شود.

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t:} \quad & x_1 \leq 4 \\
& 2x_2 \leq 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
& x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

الف) روش ترسیمی حل مساله برنامه ریزی خطی حداکثر سازی :

در فرآیند تحقیق در عملیات اشاره شد که پس از ساختن مدل، به مرحله حل آن می رسیم . در واقع یک مدل ریاضی به خودی خود ارزش کاربردی و تحلیلی ندارد. اهمیت و ارزش مدل به نتایج آن است که پس از حل حاصل می شوند . گفته شد در مدل برنامه ریزی خطی روابط از نوع خطی هستند. روابط خطی یکی از ساده ترین روابطی هستند که برای حل آنها می توان از شیوه « ترسیمی» استفاده کرد.

روش ترسیمی در مدلهای برنامه ریزی خطی به مدل هایی محدود می شوند که حداکثر دارای دو متغیر تصمیم هستند. برای حل این نوع مدل ها می توان از یک دستگاه مختصات استفاده کرد.که با ذکر مثال به آن خواهیم پرداخت.

مساله ۲-۲: کارخانه ای در صدد تولید دو نوع محصول است که میزان مصرف هر واحد از آنها از منابع (نیروی کـــار و مـــواد اولیه) به صورت زیر است . سود حاصل از تولید هر واحد از محصولات نیز داده شده است.

منابع مورد نیاز

محصول	نیروی کار (نفر – ساعت)	مواد اولیه kg	سود (ریال)
۱	۱	۴	۴۰
۲	۲	۳	۵۰
منابع	۴۰	۱۲۰	

متغیر های تصمیم مدل عبارتند از :

X_1 = تعداد تولید از محصول نوع ۱

X_2 = تعداد تولید از محصول نوع ۲

تابع هدف عبارت است از ، حداکثر کردن سود ناشی از تولید:

$$\text{Max } Z = 40 X_1 + 50 X_2$$

محدودیت های مدل به ترتیب شامل محدودیت های نیروی کار و محدودیت مواد اولیه خواهد بود.

محدودیت نیروی کار (نفر – ساعت)

$$X_1 + 2 X_2 \leq 40$$

$$۴X_1+3X_2\leq120$$

علاوه بر محدودیت های کارکردی فوق ، باید محدودیت های غیر منفی را برای متغیر های تصمیم به مدل اضافه کرد .

X_1و$X_2 \geq 0$ حال کلیت مدل ترکیب تولید به صورت زیر نوشته می شود:

$$\text{Max } Z = 40 X_1 + 50 X_2$$

S.t:

$$X_1+ 2 X_2\leq 40$$

$$4X_1 + 3 X_2 \leq 120$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

برای حل مدل فوق با استفاده از روش ترسیمی ، ابتداء یک دستگاه مختصات تشکیل می دهیم که محور افقی آن X_1 و محور عمودی آن با X_2 مدرج می شود.سپس به رسم هر یک از محدودیت ها در دستگاه مختصات می پردازیم . این عمل با در نظر گرفتن هر یک از محدودیت ها به صورت یک معادله (خط مستقیم)امکان پذیر است.

حالا به رسم محدودیت نیروی کار توجه کنید:

ابتدا آنرا بصورت خط $X_1 + 2X_2 = 40$ تعریف می کنیم.

ساده ترین روش برای رسم یک خط تعیین دو نقطه بر روی محور ها و سپس متصل کردن آن نقاط با استفاده از یک خط مستقیم است. نقطه اول می تواند با استفاده از:

$$X_1=0$$

و سپس حل معادله برحسب X_2 معلوم می شود. یعنی:

$(0) + 2X_2 = 40$

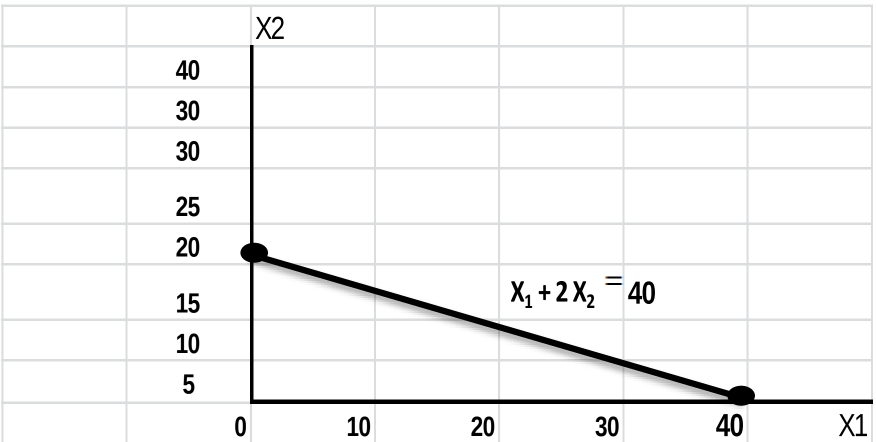
$X_2 = 20$

نقطه دوم نیز با $X_2 = 0$ و حل معادله برحسب X_1 بدست می آید. به صورت زیر

$X_1 + 2(0) = 40$

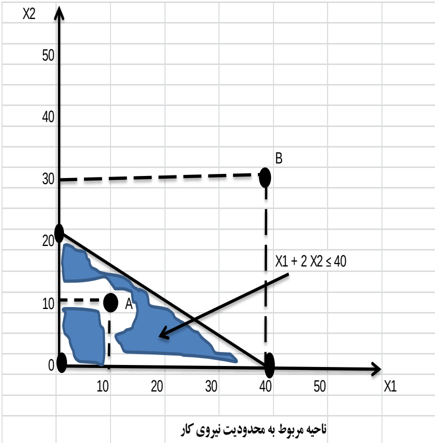
$X_2 = 40$

واضح است که نقطه ($X_1 = 0$ و $X_2 = 0$) بر روی محور عمودی و نقطه ($X_2 = 20$ و $X_1 = 40$) برروی محور افقی قرار دارد. حال با استفاده از یک خط مستقیم این دو نقطه را به هم وصل می کنیم، مطابق شکل زیر:



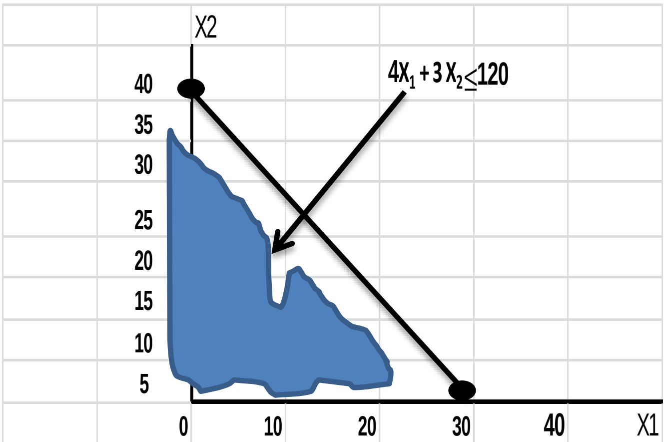
شکل ۱-۲ ترسیم خط محدودیت نیروی کار

توجه دارید که برای سادگی در ترسیم نامعادله به معادله تبدیل شده است ، پس « خط » بدست آمده در نمودار بیانگر تمامیت محدودیت نیروی کار نیست ، زیرا محدودیت شامل کلیه نقاط کوچکتر یا مساوی($\leq$) ۴۰ است.نه مقادیر مساوی (=) ۴۰ ناحیه مربوط به محدودیت نیروی کار در شکل زیر به صورت هاشور خورده نشان داده شده است.



شکل ۲-۲ ناحیه مربوط به محدودیت نیروی کار

به طریق مشابه محدودیت مواد اولیه مساله هم ترسیم می شود. همچنانکه در شکل زیر نشان داده شده است . خط مربوط به معادله دوم مدل حد فاصل بین نقاط (X_1 =۰ و ۴۰ = X_2) و (X_1 = ۳۰ و ۰ = X_2) می باشد و ناحیه مربوط به نامعادله دوم مدل به صورت هاشور خورده در منطقه کوچکتر یا مساوی (≤) خط قرار گرفته است.



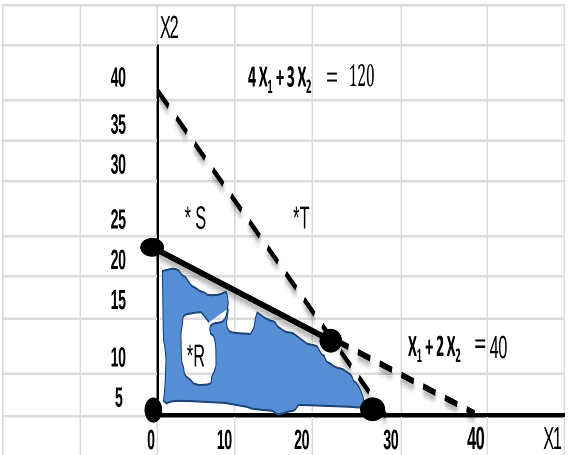
شکل ۳-۲ ناحیه مربوط به محدودیت مواد اولیه

ترکیب دو شکل فوق منجر به نمایش هندسی محدودیت های مدل به طور همزمان خواهد شد که در شکل ذیل آمده است. ناحیه هاشور خورده در شکل زیر شامل مجموعه نقاطی است که در هر دو محدودیت صادق خواهد کرد.

شکل ۳-۳ نمایش همزمان دو محدودیت

به عنوان مثال نقاط T . S . R را در شکل زیر را در نظر بگیرید. نقطه R هر دو محدودیت مدل را ارضاء می کند. بنابراین این نقطه یک « جواب موجه» می باشد. نقطه S محدودیت اول را ($X_1 + 2X_2 \leq 40$) نقض می کند ولی در محدودیت دوم ($4X_1 + 3X_2 \leq 120$) صدق می کند. بنابراین آن را یک « جواب غیر موجه» می گویند. . نقطه T نیز به طریق مشابه یک نقطه غیر موجه است. چون در هیچ یک از محدودیت های مدل صدق نمی کند.

ناحیه هاشور خورده در شکل « ناحیه موجه » Feasible Area نامیده می شود. زیرا تمامی نقاط این ناحیه ، محدودیت ها ی مدل را ارضاء می کند و در آنها صدق می نمایند. بنابراین یکی از نقاط این ناحیه منجر به حداکثر سود شرکت تولیدی در مساله خواهد شد.



شکل ۴-۲ ناحیه موجه محدودیت ها

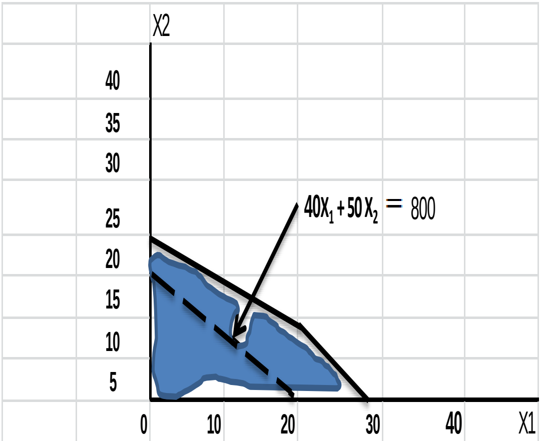
قدم بعدی در روش ترسیمی حل مدل ، یافتن « نقطه بهینه» است. نقطه بهینه این مساله ، نقطه ای است که سود به ازای آن در ناحیه موجه حداکثر می شود.

نقطه (جواب)بهینه :

قدم دوم در روش ترسیمی حل مدل های برنامه ریزی خطی،تعیین نقطه موجه ای است که بزرگترین مقدار سود به ازای آن حاصل می شود. برای بدست آوردن این نقطه ابتداء تابع هدف را به ازای یک مقدار دلخواه ترسیم می کنیم. برای مثال اگر مقدار سود Z ، ۸۰۰ ریال باشد ، تابع هدف عبارت خواهد بود از :

$۴۰ X_1 + ۵۰ X_2 = ۸۰۰$

ترسیم این خط کاملاً شبیه رویه ترسیم خطوط مربوط به محدودیت ها می باشد. نمایش هندسی این تابع در شکل زیر به صورت خط چین آمده است. همچنانکه واضح است، تمام نقاط خط مربوط به سود ۸۰۰ ریال در ناحیه موجه مدل قرار گرفته است. خط بدست آمده نشان می دهد که هر ترکیبی از X_1 و X_2 بر روی این خط ارزش معادل ۸۰۰ ریال برای Z به همراه دارد.



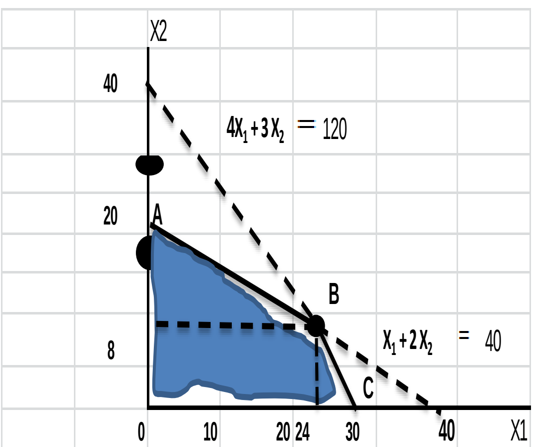
شکل ۵-۲ خط تابع هدف به ازای Z=800 ریال

تعیین مقادیر متغیر های تصمیم :

سومین مرحله در رویکرد ترسیمی حل مدل LP بدست آوردن مقادیر X_2, X_1 در نقطه بهینه است . در مثال فوق همچنانکه در شکل زیر آمده ، می توان به طریق ترسیمی دریافت که نقطه B در تقاطع $(X_1 = ۲۴$ و $۸ = X_2)$ قرار دارد. این نحوه استخراج متغیرها ی تصمیم در صورتی امکان دارد که ترسیم هندسی محدودیت ها با دقت زیادی انجام گرفته باشد.

تعیین مقادیر جواب به روش هندسی :

شکل ۶-۲ تعیین مقادیر جواب به روش هندسی



جواب بهینه علاوه بر قرار گرفتن در مرز ناحیه موجه، « همواره بر روی یک گوشه» از مرز قرار دارد. گوشه ، شامل نقطه ای است که در تقاطع « حداقل دو خط» از خطوط مرزی قرار می گیرد. خطوط مرزی مثال مسئله فوق شامل خطوط مربوط به محدودیت های نیروی کار $(X_1 + 2 X_2 \leq 40)$ و مواد اولیه $(4 X_1 + 3 X_2 \leq 120)$ و همچنین خطوط (محورهای) مربوط به $X_1 \geq 0$ و $X_2 \geq 0$ می باشد.

گوشه های بدست آمده (نقاط $A.B,C$) در شکل فوق « نقاط حدی» *Extreme Points* هستند. علت نام گذاری آنها این است که بر اساس این نقاط « حد » ناحیه موجه مشخص می شود. می توان به طریق ریاضی ثابت کرد که در برنامه ریزی خطی « جواب بهینه همواره در نقطه حدی » قرار دارد. بنابراین در مثال فوق جواب بهینه به یکی از نقاط $(A.B,C)$ محدود می شود. نقطه حدی بهینه ، آخرین نقطه ای است که خط تابع هدف در ناحیه موجه برآن مماس می شود. این خاصیت در شکل فوق نشان داده شده است.

از شکل فوق در می یابیم که جواب بهینه گوشه B است. از آنجا که نقطه B از تقاطع دو خط مرزی $X_1 + ۲X_2 = ۴۰$ و $۴X_1 + ۳ X_2 = ۱۲۰$ بوجود آمده است. پس می توان با حل همزمان این دو معادله ، مقادیر X_1 , X_2 را بدست آورد .

دستگاه معادلات:

معادله ۱ $X_1 + ۲X_2 = ۴۰$

معادله ۲ $۴X_1 + ۳ X_2 = ۱۲۰$

$$\begin{cases} X_1 + ۲X_2 = ۴۰ \\ ۴X_1 + ۳ X_2 = ۱۲۰ \end{cases}$$

طرفین معادله (۱) در ۴- ضرب کرده و مجدداً دستگاه معادلات را می نویسیم:

$$\begin{cases} -۴X_1 - ۸X_2 = -۱۶۰ \\ ۴X_1 + ۳ X_2 = ۱۲۰ \end{cases}$$

حال با حذف X_1 از دستگاه معادلات داریم :

$-۵X_2 = -۴۰$

$X_2 = ۸$

بنابراین با مشخص شدن مقدار X_2 می توانیم ، به کمک یکی از معادلات اصلی مقدار X_1 را نیز تعیین کرد .

پس به کمک معادله (۱) داریم:

$X_1 + ۲X_2 = ۴۰$

$X_1 + ۲(۸) = ۴۰$

$X_1 = ۲۴$

حال مقدار تابع هدف ، Z را به ازاء گوشه ($X_1 = ۲۴$, $X_2 = ۸$) تعیین می کنیم:

$Z = 40 X_1 + 50 X_2$

$Z = 40 (24) + 50 (8)$

$Z = 1360$ ریال

بنابراین با استفاده از رویه فوق مشخصات هریک از گوشه های موجه را بدست آورده ودر جدول زیر خلاصه میکنیم.

مشخصات نقاط حدی (گوشه های موجه)

نام گوشه	مختصات (X_1 , X_2)	مقدار تابع هدف (Z)
A	($X_1 = ۰$, $X_2 = ۲۰$)	Z =1000
B	($X_1 = ۲۴$, $X_2 = ۸$)	$Z^* = 1360$
C	($X_1 = ۳۰$, $X_2 = ۰$)	Z = 1200

واضح است که گوشه B بهترین گوشه است.چون نسبت به سایر نقاط حدی (C.A) دارای سود بیشتری است و از آنجا که براساس خاصیت مدل های برنامه ریزی خطی ، جواب بهینه همواره بر گوشه قرار دارد،پس این نقطه همان جواب بهینه مدل ترکیب تولید درمسئله ابتدای بحث ما خواهد بود.

تحلیل مثال فوق و مفاهیم بیان شده در حل ترسیمی ما را به سه خاصیت اساسی برای جواب های گوشه موجه می رساند.

خاصیت ۱)

جواب بهینه مساله برنامه ریزی خطی « قطعاً» یکی از جواب های گوشه موجه است. این خاصیت در شکل فوق به وضوح دیده می شود. علیرغم اینکه مدل دارای نقاط مرزی متعددی است. جواب بهینه نقطه B است که از تقاطع دو خط مرزی تشکیل شده است یعنی گوشه می باشد.

خاصیت ۲)

تعداد جواب های گوشه موجه « متناهی» است. در مسئله فوق ۴ گوشه موجه وجود دارد، این خاصیت بدیهی به نظر می رسد. برای اینکه متوجه شوید که چرا در حالت کلی تعداد جواب های گوشه موجه متناهی است. یادآوری می کنیم که هر جواب همزمان یک دستگاه n معادله ای است که از بین (m + n) معادله محدودیت انتخاب شده است. تعداد ترکیبات مختلف n معادله از میان (m + n) معادله موجود برابر با

$$\frac{(m+n)!}{(m\,!\,n!)}$$

که عددی قابل شمارش است. (تعداد متغیر های تصمیم تا(X_j) مساوی n تا و تعداد محدودیت های کارکردی مدل مساوی با m می باشد). البته این عدد در حقیقت « حداکثر» تعداد جواب های گوشه موجه را نشان می دهد.

Max Z = $40 X_1 + 50 X_2$

S.t:

$X_1 + 2 X_2 \leq 40$

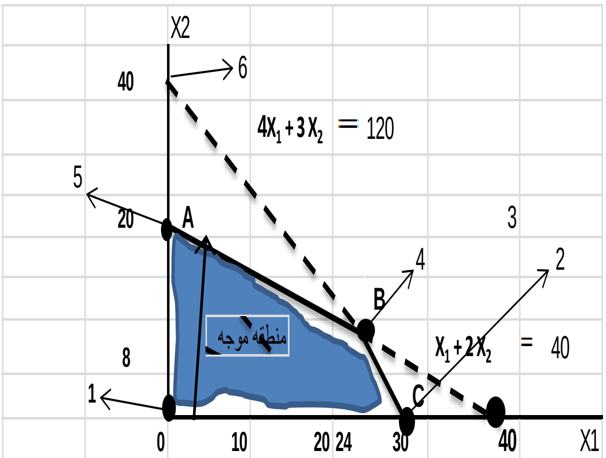
$4 X_1 + 3 X_2 \leq 120$

$X_1, X_2 \geq 0$

در مسئله فوق تعداد متغیر تصمیم دو $n = 2$ و تعداد محدودیت های کار کردی مساوی $m = 2$ می باشد بنابراین

$$\frac{(4!)}{(2\ !\ 2!)} = 6$$

یعنی۶گوشه برای مدل وجود دارد که فقط ۴ مورد آنها موجه است. که در شکل زیر به خوبی تعداد گوشه های مدل را به طریق ترسیمی نشان می دهد .



شکل ۷-۲ نمایش گوشه های مثال ۱-۲

خاصیت ۳)

چنانچه یک جواب گوشه موجه از تمام جوابهای گوشه موجه « مجاور» خود (از نقطه نظر تابع هدف) بهتر باشد، در اینصورت از تمام جواب های گوشه موجه بهتر خواهد بود.(یعنی جواب بهینه است).

دوگوشه در صورتی مجاور همدیگر خواهند بود که در یک خط مرزی مشترک باشند. بعنوان مثال گوشه B,A مجاور همدیگر هستند ،چون در خط مرزی $X_1 + ۲X_2 = ۴۰$ مشترک می باشند.

در شکل فوق این خاصیت کاملاً صحت دارددر شکل مشخص است که گوشه B نسبت به دو گوشه مجاور خود یعنی A,C بهتر است چون براساس جدول از مقدار Z بیشتری برخوردار است. پس این گوشه ، جواب

بهینه مدل است. در حالی که گوشه A نسبت به دو گوشه موجه مجاور خود یعنی مبدا مختصات ($X_1 \geq 0$ و $X_۲ \geq 0$) و B از چنین خاصیتی برخوردار نیست.پس این گوشه موجه قطعاً بهینه نخواهد بود . « اهمیت خاصیت ۳ در این است که برای بدست آوردن جواب بهینه لازم نیست تا تمام جوابهای گوشه موجه را آزمایش کرد».

حال با توجه به مفاهیم بیان شده و خواص سه گانه حل مدل برنامه ریزی خطی ، مراحل رویکرد ترسیمی حل مدل LP بصورت زیر خلاصه می شود:

۱) محدودیت های مدل را درقالب یک معادله در دستگاه مختصات رسم کنید. باتوجه به نوع نا معادله ناحیه موجه را تعیین کنید(فضای مشترک محدودیت ها را هاشور بزنید).

۲) تابع هدف را به ازای یک مقدار دلخواه ترسیم کنید، سپس خط تابع هدف را برای تعیین نقطه بهینه به سمت مناسب انتقال دهید. نقطه بهینه آخرین نقطه موجه است که تابع هدف بر آن مماس می شود.

۳) دستگاه معادلات مشترک گوشه بهینه را حل کنید تا مقادیر متغیر های تصمیم درگوشه بهینه معین گردد.

«یا»

۲) دستگاه معادلات مربوط به هریک از گوشه های ناحیه موجه را حل کنید تا ارزش متغیر های تصمیم در هر گوشه تعیین شود.

۳) مقادیر گوشه های موجه را در تابع هدف جای گذاری کنید تا مقدار Z به ازای آن گوشه مشخص شود. ضمن مقایسه مقدار Z گوشه بهینه را معین کنید.

ب) روش ترسیمی حل مساله برنامه ریزی خطی (حداقل سازی) :

چنانچه یک مدل برنامه ریزی خطی با تابع هدف (Min) حداقل سازی – دومتغیر نیز وجود داشته باشد،می توان به حل آن با استفاده از روش ترسیمی پرداخت.

مسئله ۴-۲: مدل حداقل سازی زیر را در نظر بگیرید:

Min $Z = 6X_1 + 3X_2$

S.t:

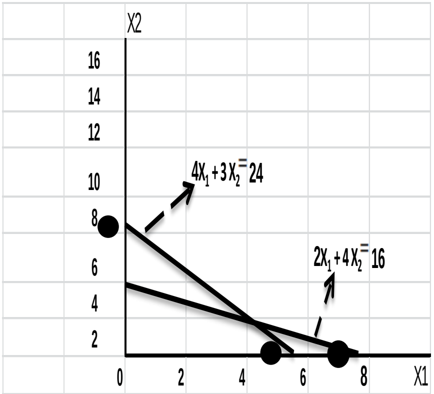
$2X_1 + 4X_2 \geq 16$ $\quad X_1=(0, 4) \quad X_2=(8,0)$

$4X_1 + 3X_2 \geq 24$ $\quad X_1=(0, 8) \quad X_2=(6,0)$

X_1 و $X_2 \geq 0$

مراحل حل ترسیمی مدل فوق کاملاً مشابه مدل حداکثر سازی است که به شرح زیر به ذکر آنها برای رسیدن به جواب بهینه مدل فوق می پردازیم.

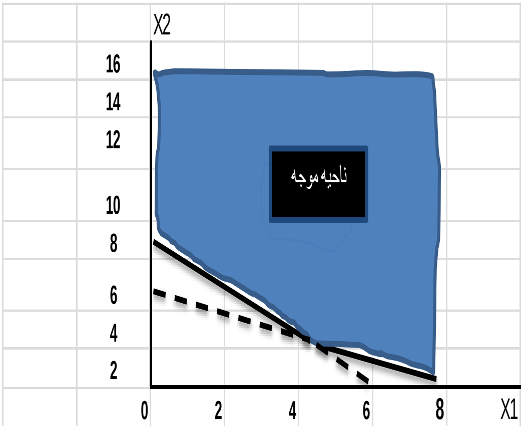
اولین قدم ، رسم معادلات مربوط به دو محدودیت مدل است. همچنانکه در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۸-۲ معادلات مربوط به محدودیتهای مثال ۲-۲

حال ناحیه مشترک موجه هر دو محدودیت را پیدا می کنیم. به طوری که قیود بزرگتر یا مساوی ≥ مربوط به هر دو محدودیت را بیان کند. منطقه هاشور خورده را در شکل زیر نشان میدهیم.

بعداز پیدا کردن ناحیه موجه ، قدم دوم ، تعیین دوم گوشه بهینه است.

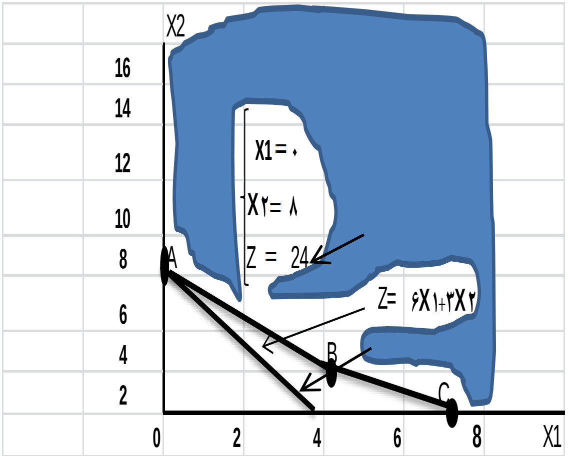


شکل ۹-۲ ناحیه موجه مدل مساله ۲-۲

به خاطر دارید که در مدل حداکثر سازی، بهترین نقطه مرزی ، نقطه ای بود که دارای « بیشترین» فاصله نسبت به مبداء مختصات بود. برعکس در مدل حداقل سازی ، بهترین نقطه مرزی نقطه ای است که دارای « کمترین » فاصله نسبت به مبداء مختصات باشد. به عبارت دیگر در مدل حداکثر سازی ، گوشه بهینه ، « دورترین گوشه حدی» نسبت به مبداء مختصات است ولی در مدل حداقل سازی ، گوشه بهینه ، « نزدیکترین گوشه حدی» به مبداء مختصات است. چون هرچه مقدار متغیر های تصمیم کوچکتر باشد،مقدار Z کمتر خواهد بود.

مفاهیم فوق در نمودار زیر به خوبی بیان شده اند.

شکل : جواب (گوشه) بهینه:



شکل ۱۰-۲ جواب (گوشه) بهینه

در شکل فوق نقاط گوشه (A.B.C) و خط تابع هدف را نشان می دهد.همچنانکه تابع هدف به سمت پایین (مبدا مختصات) انتقال می یابد ، آخرین نقطه ای که تابع هدف از منطقه موجه با آن مماس می شود، نقطه A است. به عبارت دیگر ،گوشه A ، آخرین گوشه است که بدون غیر موجه شدن خط تابع هدف ، مقدار Z را حداقل می کند.

آخرین مرحله در روش ترسیمی ،پیدا کردن مقادیر X_1 , X_2 در گوشه A است. از آنجاکه گوشه A از تقاطع معادلات مرزی

$X_1 = ۰$ و $4 X_1 + 3 X_2 = 24$ حاصل شده است،پس داریم :

$X_1 = ۰$

$۴ (۰) + ۳X_2 = ۲۴$

$X_2 = ۸$

بنابراین گوشه بهینه مدل در مسئله فوق عبارتست از : ($X_1 = ۰$ و $X_2 = ۸$) . مقدار هزینه تولید به ازاء گوشه بهینه ، Z برابر است با :

$Z = ۶X_1 + ۳X_2$

$Z = ۶(۰) + ۳(۸)$

$Z = ۲۴$

به طریق مشابه می توان مختصات گوشه های B , C را هم پیدا کرد که توصیه می شود دانشجویان عزیز به عنوان تمرین این کار را انجام دهند.

مساله مدل سازی ۳-۲

یک کارخانه صنایع چوبی دو محصول (میز وصندلی) تولید می کند. برای تولید هر واحد میز و صندلی به دو نوع چوب بلوط و کاج و میزان متفاوتی از نیروی انسانی نیاز است.

برای تولید هر واحد میز به ۵ فوت چوب بلوط و ۲فوت چوب کاج و ۴نفر ساعت نیروی انسانی نیاز است.

و برای هر صندلی به ۲ فوت چوب بلوط و ۳ فوت چوب کاج و ۲نفر نیروی انسانی نیاز است.

میزان نیروی انسانی در طول هفته ۸۰ نفر ساعت و میزان چوب بلوط و کاج به ترتیب ۱۵۰ و ۱۰۰فوت مربع است.

کارخانه می خواهد بداند چه تعداد میز و صندلی تولید کند تا سودش حداکثر شود. با توجه به اینکه سود هر میز و صندلی به ترتیب ۱۲ و ۸ واحد است.

نوع محصول	بلوط	کاج	منابع مورد نیاز
محصول ۱ (میز)	5	2	150
محصول ۲ (صندلی)	2	3	100
نیروی انسانی	4	2	80
سود	12	8	❋

میز=X_1 و صندلی = X_2

$$\text{Max } Z = 12X_1 + 8X_2 \longrightarrow \text{Max } Z - 12X_1 - 8X_2 = 0$$

۱ $X_1=(0\ ,30)$،$X_2=(75\ ,0)$	$5X_1+2X_2 \leq 150$	$\longrightarrow$ $5X_1+2X_2+S_1=150$	بلوط
$X_1=(0\ ,50)$ و $X_2=(33.3\ ,0)$ ۲	$2X_1+3X_2 \leq 100$	$\longrightarrow$ $X_1+3X_2+S_2=100$	کاج
$X_1=(0\ ,20)$ و $X_2=(40,0)$ ۳	$4X_1+2X_2 \leq 80$	$\longrightarrow$ $4X_1+2X_2+S_3=80$	نیروی انسانی

نقاط	مقادیر نقاط	Z
A	(0,0)	$Z_A = 0$
B	(0 , 33.3)	ZB= 2066.4
C	**(5,30)**	**$Z_C= 300$**
D	(20,0)	ZD = 240

$$(-2)\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 = 100 \\ 4X_1 + 2X_2 = 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4X_1 - 6X_2 = -200 \\ 4X_1 + 2X_2 = 80 \end{cases} \longrightarrow Z_C = 300$$

X_b	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z_0	۱	−۱۲	−۸	۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۵	۲	۱	۰	۰	۱۵۰:۵=۳۰
S_2	۰	۲	۳	۰	۱	۰	۱۰۰:۲=۵۰
S_3	۰	۴	۲	۰	۰	۱	۸۰:۴=۲۰
Z_0	۱	۰	−۲	۰	۰	۳	۲۴۰
S_1	۰	۰	$-\frac{1}{2}$	۱	۰	$-\frac{5}{4}$	۵۰
S_2	۰	۰	۲	۰	۱	$-\frac{1}{2}$	۶۰:۲=۳۰
X_1	۰	۱	$\frac{1}{2}$	۰	۰	$\frac{1}{4}$	۲۰ × ۲=۴۰
Z_0	۱	۰	۰	۰	۱	$\frac{5}{2}$	۳۰۰
S_1	۰	۰	۰	۱	$\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{8}$	۶۵
X_2	۰	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	۳۰
X_1	۰	۱	۰	۰	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	۵

۳) موارد خاص در برنامه ریزی خطی

درمباحث تحقیق در عملیات (۱)، اشکال اساسی و استاندارد برنامه ریزی خطی به صورت حداکثر سازی(Max) و حداقل سازی(Min) و... بیان شد. با این وجود، موارد خاصی از مسائل برنامه ریزی خطی وجود دارد. اگرچه این دسته از مدل های برنامه ریزی خطی کمتر در دنیای واقع رخ می دهند ولی در اینجا با چگونگی تشخیص آنها و خواص هر یک آشنا می شویم.

موارد خاص در برنامه ریزی خطی شامل حالت های زیر است:

1) **جواب بهینه چندگانه (Multiple Optimal Solution)**
2) **فاقد ناحیه موجه(جواب) (Infeasible Solution)**
3) **ناحیه جواب بیکران (Unbounded Solution)**
4) **جواب تبهگن(Degenerate Solution)**

حال به تشریح هر یک از موارد فوق می پردازیم

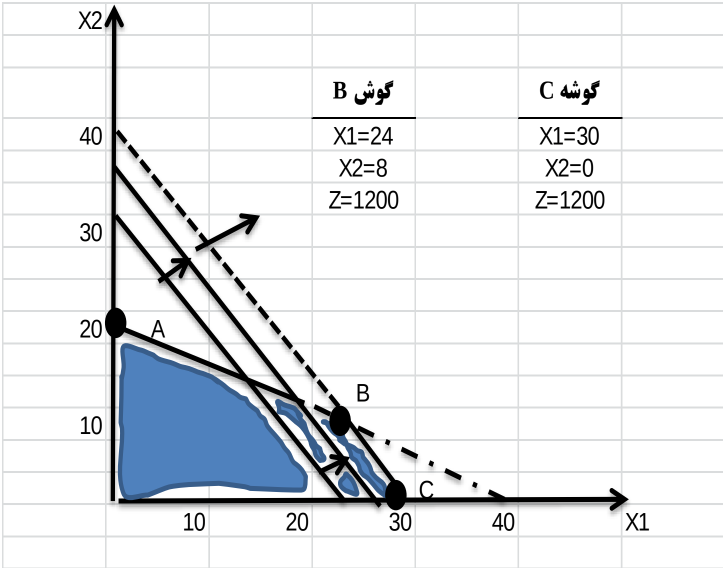
۱– جواب بهینه چندگانه

مسائل برنامه ریزی خطی در فرم استاندارد دارای یک نقطه (گوشه) بهینه هستند. تابع هدف در این گوشه حداقل یا حداکثر می گردد. جواب بهینه در مقایسه با سایر جواب های مدل برنامه ریزی خطی بهترین است. فرم خاصی از مدل های برنامه ریزی خطی وجود دارد که بیش از یک گوشهٔ بهینه دارند. در این نوع مدل ها تعداد نقاط بهینه بی نهایت است. به عنوان نمونه به مثال زیر توجه کنید.

مسأله۵-۲ برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 40x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t:} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 120 \\ & x_1 , x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

نمایش هندسی این مدل در شکل زیر دیده می شود. همچنانکه در شکل دیده می شود خط تابع هدف، موازی با خط محدودیت $4X_1 + 3X_2 = 120$ قرار گرفته است. به عبارت دیگر شیب هر دو خط با همدیگر یکسان است. بنابراین همچنان که خط تابع هدف به بالا انتقال می یابد، بجای مماس شدن با یک نقطه حدی، بر پاره خط رابط نقاط B و C منطبق می شود. این بدان معنی است که تمامی نقاط قرار گرفته بر روی خط BC جزء نقاط بهینهٔ مدل قرار می گیرند. و به عبارت بهتر، هر نقطه بر روی این پاره خط سودی مساوی $1200(Z = 1200)$ خواهد داشت. این نوع مدل ها را در برنامه ریزی خطی، مدل های دارای «جواب بهینه چندگانه» گویند. با توجه به اینکه در برنامه ریزی خطی به دنبال گوشه بهینه (خاصیت۱) خواهیم بود، پس نقاط انتهای پاره خط BC به عنوان گوشه های بهینه تعریف می شوند. گوشه های بهینهٔ B و C ، جوابهای بهینهٔ «جایگزین» همدیگر نیز گفته می شوند. مدیران برای تصمیم گیری، درصدد یافتن سناریوهای تصمیم گیری متفاوت با سود حداکثر هستند. با این نگاه جواب بهینهٔ چندگانه برای مدیران خشنودکننده نیز هست! چون مدیر در تصمیم گیری خود دارای انعطاف پذیری لازم و قدرت مانور مناسب خواهد بود. به عنوان نمونه در مثال مدیر با دو سناریوی بهینه روبرو است که با توجه به شرایط تصمیم گیری می تواند سناریوی مناسب خود را انتخاب کند. چنانچه شرایط بازار تنوع کالا را می طلبد، می تواند از گوشهٔ B استفاده کند یعنی؛($X_1 = 24$ و $X_2 = 8$) و اگر بازار شرایط حجم تولید در یک کالا طلب می کند، از نقطهٔ C استفاده خواهد کرد.



شکل ۱۱-۲ نمایش هندسی مساله ۳-۲ با جواب بهینه چندگانه

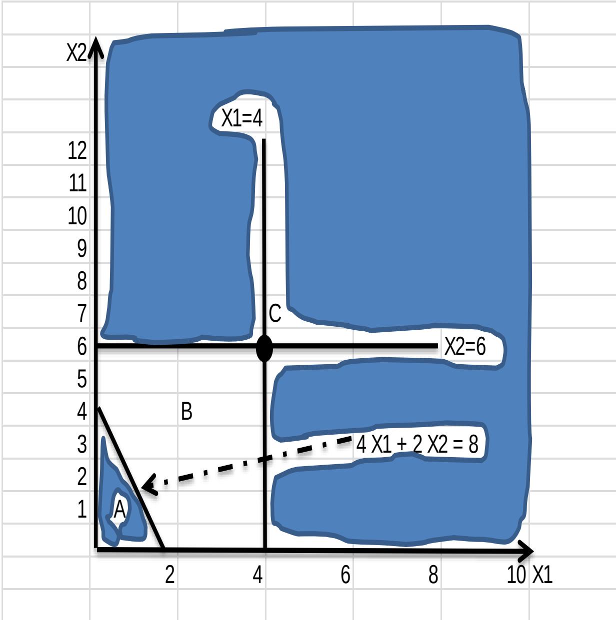
۲- فاقد ناحیه موجه(جواب)

در برخی از مسائل برنامه ریزی خطی نمی توان برای کلیهٔ محدودیت های مدل ناحیهٔ مشترک پیدا کرد. بنابراین مسأله فاقد ناحیهٔ موجه خواهد بود. دراین گونه مدل ها پیدا کردن جواب بهینه بی معنا است. نمونهٔ این دسته از مدل ها را در مثال زیر خواهید دید.

مسأله۶-۲ برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max} \quad Z = 5x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t:} \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$x_1 \geq 4$$
$$x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

شکل زیر بیانگر منطقهٔ موجه هر یک از محدودیت های مدل فوق است. همچنان که مشخص است، محدودیت های مدل دارای ناحیه مشترک نیستند. به عبارت دیگر محدودیت های مدل در تناقض با همدیگر هستند. بنابراین نمی توان برای همهٔ آنها ناحیهٔ مشترک پیدا کرد.



شکل ۱۳-۲ نمایش هندسی مدل مثال فاقد ناحیه موجه

نقطهٔ A در شکل فوق فقط محدودیت $4X_1 + 2X_2 \leq 8$ را ارضاء می کند و نقطهٔ B در هیچ یک از آنها صدق نمی کند، از آنجا که هیچ نقطه ای نمیتوان یافت که در هر سه محدودیت صدق کند، پس مدل مثال فوق فاقد ناحیه موجه است و قابل حل نیست. آنچه مسلم است، مدل های فاقد ناحیه موجه در عالم واقع وجود خارجی ندارند. علت بروز چنین مدل هایی تعریف نادرست مسأله و مشاهدات غیرواقعی از محیط سازمانی است. گاهی اوقات نیز علیرغم تعریف صحیح مسأله و مشاهدهٔ درست، در فرموله کردن مسأله دچار خطا می شوند، در نتیجه چنین مدلی ایجاد می شود. با مشاهدهٔ چنین وضعیتی برای مدل مسأله باید درصدد رفع عیب آن برآمد.

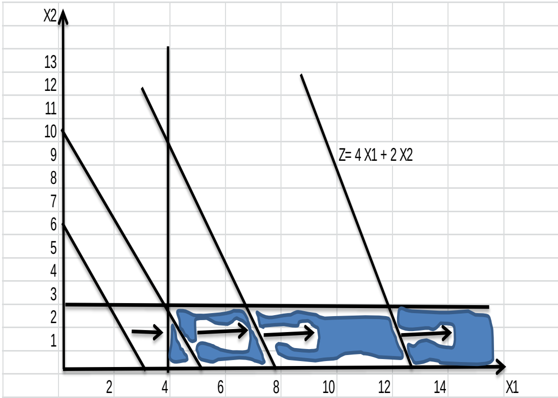
۳- ناحیه جواب بیکران

در برخی از مسائل ناحیه موجه مدل طراحی شده، بوسیلهٔ محدودیت ها محصور نمی شود. به عبارت دیگر ناحیه موجه در میان معادلات مرزی بسته نمی شود. در چنین مدل هایی ممکن است تابع هدف به نحو نامحدودی افزایش(کاهش) یابد و هیچگاه به نقطهٔ حداکثر (حداقل) نرسد. مدل ارائه شده در مثال زیر نمونهٔ خوبی از چنین مدل هایی است.

مساله ۷-۲: مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad Z = 4x_1 + 2x_2 \\ &\text{s.t:} \qquad x_1 \geq 4 \\ &\qquad\qquad x_2 \leq 8 \\ &\qquad\qquad x_1 , x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

در شکل نشان داده شده است که چگونه تابع هدف این مدل بدون هیچ گونه حد و مرزی در حال افزایش است. به طوری که هیچ گاه جواب بهینه حاصل نمی شود.

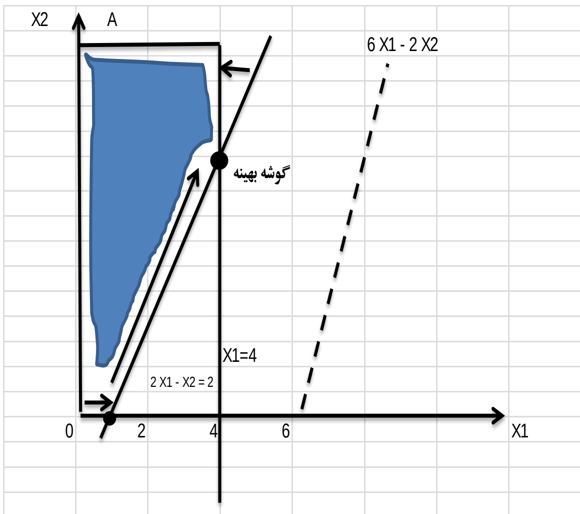


شکل ۱۴-۲ نمایش هندسی مساله با ناحیه موجه بیکران بدون گوشه بهینه

واضح است که سود نامحدود در عالم واقع غیر ممکن است. بنابراین چنین مورد خاصی از برنامه ریزی خطی وجود خارجی ندارند. علت پدید آمدن چنین حالتی؛ اشتباه در تعریف مسأله و یا اشتباه در فرموله کردن آن خواهد بود. مدل هایی از برنامه ریزی خطی وجود دارند که علیرغم بیکران بودن ناحیه موجه دارای جواب بهینه گوشه ای هستند. نمونه ای از این مدل ها در مثال و شکل زیر دیده می شود.

مساله ۸-۲: مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 6x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t:} \quad & 2x_1 - x_2 \le 2 \\
& x_1 \le 4 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



شکل ۱۵-۲ ناحیه جواب بیکران با جواب گوشه بهینه

همچنانکه از روش ترسیمی حل مثال فوق مشخص می شود، فضای موجه مسأله بیکران است و می توان گوشه ای را پیدا کرد که تابع هدف به ازای آن گوشه حداکثر می شود. بنابراین، این نوع مدل ها را مدل های

دارای « ناحیه جواب بیکران دارای گوشه بهینه » گویند. گوشهٔ بهینه در مدل فوق عبارتست از: ($X_2 =$ و 6) $X_1 = 4$ که مقدار تابع هدف به ازای آن مساوی است با :

$$Z^* = 6(4) - 2(6) = 12$$

۴- جواب تبهگن

برای تشکیل هر گوشه در برنامه ریزی خطی دو معادله مرزی کافی است. اگر گوشه ای موجه از بیش از دو معادله مرزی تشکیل شود، برخی از معادلات در آن زاید خواهند بود. تعداد معادلات مرزی زاید مساوی است با تعداد معادلاتی که از گوشه می گذرند منهای ۲. گوشه ای که از بیش از دو معادلهٔ مرزی تشکیل شده باشد را گوشهٔ «تبهگن»گویند. مثال و شکل زیر بیانگر مفهوم تبهگنی می باشند.

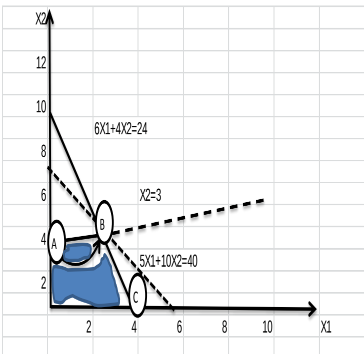
مسأله ۹-۲ برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t:} \quad & 6x_1 + 4x_2 \le 24 \\ & x_2 \le 3 \\ & 5x_1 + 10x_2 \le 40 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

حال مسأله فوق به روش ترسیمی در شکل دیده می شود. همچنانکه واضح است، جواب بهینه در گوشهٔ B واقع شده است که ($X_2 = 3$ و $X_1 = 2$) است. گوشهٔ B از سه معادله مرزی؛ تشکیل شده است. با توجه به تعریف گوشه، واضح است که یکی از معادلات مرزی فوق زاید است. گوشهٔ B با ترکیب دو تا از معادلات فوق بدست می آید. چنین گوشه ای را «گوشه تبهگن» گویند و مساله ای که دارای گوشهٔ تبهگن باشد، به عنوان یکی از حالت های خاص برنامه ریزی خطی تعریف می شود. پس آن دسته از مدل های برنامه ریزی خطی که دارای گوشهٔ تبهگن (گوشه بهینه تبهگن یا گوشهٔ موجه تبهگن) باشند به مدل تبهگن برنامه ریزی خطی معروف هستند.

$$\begin{aligned} & 6x_1 + 4x_2 = 24 \\ & x_2 = 3 \\ & 5x_1 + 10x_2 = 40 \end{aligned}$$

تشکیل شده است.



شکل۱۶-۲ نمایش هندسی جواب تبهگن

فصل سوم

برنامه ریزی عدد صحیح

برنامه ریزی عدد صحیح

مدل سازی برنامه ریزی عدد صحیح

همانطور که در فصل دوم در برنامه ریزی خطی در رابطه با فرض بخش پذیری بیان شد که باعث میشود ، در بسیاری از مسائل واقعی ، چنانچه مقادیری غیر از عدد صحیح به متغیر های صحیح داده شده که از نظر مفهومی بی معنا باشد. به عنوان مثال ، تعداد نفرات یا تعداد دستگاه ها که باید به مقادیر صحیح اختصاص یابد. در ادبیات تحقیق در عملیات بررسی موارد فوق را برنامه ریزی خطی عدد صحیح می نامند .

اگر همه متغیر های تصمیم یک مسئله برنامه ریزی خطی ، عدد صحیح باشند، به آن برنامه ریزی عدد صحیح خالص (Pure integer programming) گفته می شود. اگر فقط در مورد تعدادی از متغیر ها فرض عدد صحیح بودن صادق باشد، به آن برنامه ریزی عدد صحیح مختلط (Mixed integer programming) گفته می شود.

در تحقیق در عملیات (۱) با مباحثی از برنامه ریزی خطی آشنا شده ایم. برنامه ریزی خطی یکی از مهمترین مباحث برنامه ریزی ریاضی در تحقیق در عملیات (OR) است، مفروضات برنامه ریزی خطی که بررسی شد به شرح زیر می باشد:

۱. **فرض تناسب**
۲. **فرض جمع آوری**
۳. **فرض قطعی بودن**
۴. **فرض بخش پذیری**

" **فرض بخش پذیری** " بیانگر این مفهوم بود که متغیرهای تصمیم به کار رفته در مدل هر مقدار دلخواه (عدد صحیح یا غیر صحیح) را در دامنه تعریف شده می توانند اختیار کنند. در حالی که اغلب مدل های کاربردی دارای یک یا چند متغیر صحیح می باشند و حتی در برخی از مواقع همه متغیرهای موجود در یک مدل کاربردی ممکن است عدد صحیح باشند.

به عنوان مثال فرض کنید متغیر تصمیم (x_j) بیانگر تعداد نیروی انسانی استخدام شده باشد در این حالت ،x_jهر مقدار عدد صحیح بزرگتر یا مساوی صفر(0=) را اختیار خواهد کرد. بنابراین تعریف آن در انتهای مدل به صورت $x_j \geq 0$ بی معنی است زیرا $x_j \geq 0$ شامل مقادیر غیر صحیح مثل ۳/۵ نیز خواهدبود. به عبارت

دیگر x_j دیگر یک متغیر پیوسته نیست. یعنی فرض بخش پذیری برای این متغیر بی معنی است . پس باید گفت که x_j فقط مقادیر عدد صحیح بزرگتریا مساوی صفر را اختیار خواهد کرد. پس خواهیم نوشت: عدد صحیح و $x_j \geq 0$ از سوی دیگر برخی از متغیرهای تصمیم وجوددارد که فقط مقادیر ۰ یا ۱ اختیار می کنند. به عنوان مثال اگر بخواهیم تصمیمی در خصوص اجرا یا عدم اجرای یک پروژه ساختمانی اتخاذ کنیم. در این صورت x_jیک متغیر صفر (عدم اجرای پروژه ساختمانی) یا یک (اجرای پروژه ساختمانی) خواهد بود.

در نتیجه به صورت زیر نمایش داده می شود: x_j : ۰ یا ۱

این متغیر نیز نوع خاصی از متغیر عدد صحیح است که در آن فرض بخش پذیری نقض شده است. پس می توان گفت مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح مدلی است که دارای:

۱)تابع هدف خطی ۲) محدودیت های خطی ۳) متغیرهای نامنفی ۴) معین بودن باشد. چنانچه دریک مدل هر سه فرض فوق وجود داشته باشد ولی فرض بخش پذیری برای یک یا چند متغیر آن وجود نداشته باشد، این مدل به برنامه ریزی عدد صحیح معروف خواهد شد.همانطور که گفته شد،اگر همه متغیرهای مدل صحیح باشند، مدل را برنامه ریزی عدد صحیح محض،چنانچه فقط برخی از متغیرهای تصمیم صحیح باشند، برنامه ریزی را مدل برنامه ریزی عدد صحیح مختلط و چنانچه متغیرهای تصمیم همگی از نوع صفر یا یک باشند، مدل را برنامه ریزی صفر و یک گویند. در بخش های بعدی با نمونه هایی از هر دسته از مدل های برنامه ریزی عدد صحیح آشنا خواهید شد.

مثالی از برنامه ریزی عدد صحیح محض

یک فروشنده کالا تصمیم دارد که فقط کولر و یخچال خرید و فروش نماید، بررسی های بازار نشان می دهد که سود حاصل از فروش هر کولر۵۰۰۰ واحد پولی و سود حاصل از فروش هر دستگاه یخچال ۶۰۰۰ واحد پولی خواهد بود. کل سرمایه فروشنده دو میلیون واحد پولی و فضای انبار ۶۰ متر مربع می باشد. اطلاعات مربوط به هزینه خرید هر کولر ویخچال و همچنین فضای مورد نیاز در جدول ۱-۳ آورده شده است.

جدول ۱-۳ اطلاعات مربوط به هزینه خرید و فضای مورد نیاز هر کولر ویخچال

نوع کالا	هزینه خرید هر واحد (واحد پولی)	فضای مورد نیاز هر واحد
کولر	۱۰۰/۰۰۰	۴
یخچال	۲۰۰/۰۰۰	۲

مساله را به گونه ای فرموله کنید که فروشنده به حداکثر سود دست یابد. مراحل فرموله کردن یک مساله عدد صحیح کاملاً مشابه مساله برنامه ریزی خطی خواهد بود. بنابراین مراحل فرموله سازی به صورت زیر اجرا می گردد.

مرحله۱) تعریف متغیر تصمیم : متغیرهای تصمیم دراین مساله عبارتند از :

تعداد کولرهایی که فروشنده خریداری می کند: (x_1)

تعداد یخچال هایی که فروشنده خریداری می کند: (x_2)

مرحله ۲) تعریف تابع هدف: تابع هدف از نوعMax خواهد بود، زیرا فروشنده درصدد سود کردن فروشگاه خود می باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{Max} \quad Z = 5{,}000x_1 + 6{,}000x_2$$

مرحله۳) تعریف محدودیت های مدل: محدودیت های مدل به دو دسته تحت عنوان محدودیت های کارکردی ومحدودیت های غیرمنفی تعریف خواهد شد. محدودیت های کارکردی مدل شامل محدودیت سرمایه ومحدودیت انبار می باشد که به صورت زیر تعریف می شوند.

محدودیتهای سرمایه : $100{,}000x_1 + 200{,}000x_2 \leq 2{,}000{,}000$

محدودیت های انبار (مترمربع): $4x_1 + 2x_2 \leq 60$

محدودیت سرمایه بیانگر این واقعیت است که مجموع خرید ریالی فروشنده نمی تواند بیشتر از سرمایه وی (۲/۰۰۰/۰۰۰ ریال) باشد ومحدودیت انبار نیز نشان می دهد که مجموع فضای اشغال شده بوسیله کالاهای خریداری شده نباید بیشتر از ظرفیت انبار (۶۰ مترمربع) باشد.

محدودیت غیرمنفی بودن مدل نیز به صورت $x_1, x_2 \geq 0$ تعریف می شوند. یعنی مقادیر منفی برای کولر یا یخچال امکان پذیر نیست و حداقل مقدار خریداری شده از کالاها صفر خواهد بود. اما آنچه باید در اینجا مدنظر داشت آن است که علاوه بر غیر منفی بودن x_1 و x_2 ، قید دیگری نیز با آنها مرتبط است و آن اینکه کولر ویخچال خریداری شده همواره ۰ تا ۱ یا ۲ و ... خواهد بود. به عبارت دیگر مقادیر اعشاری برای یخچال و کولر بی معنی است و x_1 و x_2 ضرورتاً مقادیر صحیح اختیار می کنند. این قید به صورت زیر به مدل اضافه می شود:

$x_1, x_2 \geq 0,$ عدد صحیح

اکنون مدل کامل برنامه ریزی عدد صحیح برای مثال فوق نوشته می شود:

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = 5000x_1 + 6000x_2 \\ &s.t: \\ &100{,}000x_1 + 200{,}000x_2 \leq 2{,}000{,}000 \\ &\qquad 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0, \text{عدد صحیح} \end{aligned}$$

همچنانکه مدل فوق نشان میدهد، هیچ یک از متغیرهایx_1 و x_2 نمی توانند اعشار داشته باشند بنابراین تنها تغییر در مدل فوق نسبت به مدل برنامه ریزی خطی قید عدد صحیح بودن متغیرهاست یعنی اینکه مقادیر متغیرها می بایست لزوماً عدد صحیح باشند.

مثالی نمونه از برنامه ریزی عدد صحیح مختلط

یک سرمایه گذار جوان ۵۰۰/۰۰۰ واحد پولی، پول دارد که می تواند آن را برای خرید سهام، خرید زمین یا خرید اوراق قرضه استفاده کند. سرمایه گذار جوان می خواهد سرمایه اش را به گونه ای سرمایه گذاری کند که طی یک سال بیشترین سود را بدست آورد. جدول ۲-۳ اطلاعات مربوط به سود و هزینه خرید را نشان می دهد.

جدول ۲-۳ اطلاعات مربوط به سود و زیان

گزینه ها	سود(واحد پولی)	قیمت خرید(واحد پولی)
سهام– به ازای هر سهم	۸۰۰۰	۵۰۰۰۰
زمین– هر هکتار	۲۰۰۰	۱۰۰۰۰
اوراق قرضه– هر واحد	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰

تعداد سهام موجود، هکتار زمین موجود تعداد اوراق قرضه موجود به ترتیب ۱۰، ۲۰ و ۵ می باشد. مساله را به گونه ای فرموله کنید که سود یکسال سرمایه گذاری حداکثر شود.

مراحل فرموله کردن مساله به صورت زیر است:

مرحله ۱) تعریف متغیرهای تصمیم : در مساله فوق متغیرهای تصمیم عبارتند از:

تعدادسهامی که خریداری می شود : (x_1)

هکتار زمینی که خریداری می شود: (x_2)

تعداد اوراق قرضه ای که خریداری می شود: (x_3)

مرحله ۲) تعریف تابع هدف: هدف مساله حداکثر کردن سود ناشی از سرمایه گذاری در سه گزینه سهام ، زمین و اوراق قرضه است. بنابراین ضرب کردن سود حاصل از هر گزینه در متغیر تصمیم آن تابع هدف شکل می گیرد. از این رو تابع هدف مساله فوق به صورت زیر خواهد بود: $\text{Max} \;\; Z = 8{,}000x_1 + 2{,}000x_2 + 1{,}000x_3$ مرحله ۳) تعریف محدودیت های مدل:

محدودیت های مدل شامل محدودیت های سرمایه، تعداد موجود از هر گزینه و محدودیت های غیرمنفی و قید عدد صحیح خواهد بود که عبارتند از :

محدودیتهای کارکردی $5{,}000x_1 + 10{,}000x_2 + 10{,}000x_3 \le 500{,}000$

محدودیت حداکثر سرمایه گذاری در هر گزینه

حداکثر سهام موجود $x_1 \le 10$

حداکثر هکتارزمین موجود $x_2 \le 20$

حداکثر اوراق قرضه موجود $x_3 \le 5$

محدودیت های غیرمنفی نیز می بایست برای هر سه متغیر تصمیم رعایت شود. چون تعداد سهام خریداری، یا میزان زمین خریداری شده و تعداد اوراق قرضه خریداری شده نمی تواند منفی باشد پس باید نوشت:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

قید عدد صحیح بودن برای تعداد سهام خریداری شده (x_1) و تعداد اوراق قرضه خریداری شده (x_3) الزامی است. چون نمی توان کسری از اوراق قرضه (مثلاً ۲/۵واحد) خریداری کرد.ولی می توان ۱/۲ هکتار زمین خریداری کرد. پس x_2 متغیری است که مقادیر صحیح یا اعشاری خواهد داشت. پس باید عدد صحیح بودن x_1 و x_3 در مدل تعریف شود به بیان ساده محدودیت های زیررا می بایست به انتهای مدل الحاق نمود.

$x_2 \geq 0 \qquad x_1, x_3 \geq 0,$ عدد صحیح

اکنون می توان کل مدل فوق را به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad Z = 8{,}000x_1 + 2{,}000x_2 + 1{,}000x_3 \\
&\text{S.t:} \\
&50{,}000x_1 + 10{,}000x_2 + 10{,}000x_3 \leq 500{,}000 \\
&x_1 \leq 10 \\
&x_2 \leq 20 \\
&x_3 \leq 5 \\
&x_2 \geq 0 \\
&x_1, x_3 \geq 0 \quad \text{عددصحیح}
\end{aligned}$$

مساله نمونه از برنامه ریزی صفر و یک

مدیریت یک کارخانه تولیدی در نظر دارد که تولید ۶ کالای جدید را به خط تولید اضافه کند. برآورد سرمایه مورد نیاز و سودآوری این ۶ پروژه جدید به شرح جدول زیر است. مدیریت کارخانه تصمیم دارد تولید کالاهایی را از ۶ پروژه پیشنهادی به عهده بگیرد که سود حاصل از آنها به حداکثر ممکن برسد.

جدول ۳-۳ سرمایه مورد نیاز و سود حاصل از تولید هر کالای جدید

شماره کالا	۱	۲	۳	۴	۵	۶
سرمایه مورد نیاز (ریال)	۱۰۰	۱۲۰	۱۸۰	۹۰	۲۰۰	۱۵۰
سود حاصل از اضافه شدن کالای جدید به خط تولید (ریال)	۲۰۰	۲۵۰	۳۰۰	۱۵۰	۳۲۰	۲۵۰

کل سرمایه کارخانه برای سرمایه گذاری در پروژه های جدید ۶۰۰ ریال است. بررسی های بخش تحقیق و توسعه کارخانه نشان می دهد که با توجه به شرایط بازار حداکثر می توان ۴ کالای جدید تولید کرد.

مساله را به گونه ای فرموله کنید که حداکثر سود ممکن از پروژه های جدید حاصل گردد. بنابراین مراحل فرموله سازی مساله براساس روال معمول به شرح زیر خواهد بود:

مرحله۱) تعریف متغیرهای تصمیم : نوع تصمیم در این مثال با تصمیمات اتخاذ شده در مثالهای قبل کاملاً متفاوت است. در این مساله باید در خصوص تولید یا عدم تولید کالای جدید تصمیم گیری شود. به عبارت دیگر در صورتی که کالا تولید شود پروژه مربوطه ۱ و اگرکالایی تولیدنشود پروژه مربوطه مقدار صفر خواهد گرفت به عنوان مثال:

$$x = \begin{cases} 1 & \text{اگر کالای جدید (پروژه شماره(1)) به خط تولید اضافه شود} \\ 0 & \text{اگر کالای جدید (پروژه شماره(1)) به خط تولید اضافه نشود} \end{cases}$$

پس این تعریف را می توان به هر شش کالا به صورت زیر تعمیم داد.

$$\begin{matrix} x_j \\ (j = 1,2,\dots,6) \end{matrix} = \begin{cases} 1 & \text{تولید کالای شماره} j \text{ ام از 6 کالای جدید به خط تولید اضافه شود} \\ 0 & \text{تولید کالای } j \text{ ام از 6 کالای جدید به خط تولید اضافه نشود} \end{cases}$$

این نوع متغیرها که صرفاً مقادیر صفر یا یک را می توانند اختیار کنند به متغیرهای صفر و یک معروفند.

مرحله ۲) تعریف تابع هدف: تابع هدف باید به گونه ای فرموله شود که حداکثر سود ممکن ناشی از تولید کالاهای جدید حاصل گردد. هر کالا در صورتی که تولید شود، سودی نصیب کارخانه خواهد کرد و اگر تولید نشود، سود آن صفر خواهد شد. به عنوان مثال اگر کالای شماره (۱) به خط تولید اضافه شود، سودی معادل ۲۰۰ ریال برای کارخانه به همراه خواهد داشت و اگر تولید نشود، سود اضافه نشده به کارخانه در اثر عدم تولید این کالا صفر خواهد بود. بنابراین عبارت $200x_1$بیانگر این مفهوم خواهد بود. و شکل کلی تابع هدف به صورت زیر درمی آید:

$$\text{Max} \quad Z = 200x_1 + 250x_2 + 300x_3 + 150x_4 + 320x_5 + 250x_6$$

مرحله۳) تعریف محدودیت های مدل: محدودیت های کارکردی مدل شامل محدودیت سقف سرمایه گذاری و محدودیت حداکثر اجرای ۴ پروژه خواهد بود که به صورت زیر تعریف خواهند شد.

محدودیت سرمایه گذاری :

$$100x_1 + 120x_2 + 180x_3 + 90x_4 + 200x_5 + 150x_6 \leq 600$$

محدودیت حداکثر پروژه قابل اجرا:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 4$$

علاوه بر محدودیت های فوق باید، قید صفر و یک بودن متغیرها را به انتهای مدل اضافه کرد تا در هنگام حل، ضرورتاً متغیرهای تصمیم مقادیر صفر و یک را به خود اختصاص دهند.

حال مدل کامل مساله را به صورت زیر می نویسیم :

$$\text{Max} \quad Z = 200x_1 + 250x_2 + 300x_3 + 150x_4 + 320x_5 + 250x_6$$

s.t:

$$100x_1 + 120x_2 + 180x_3 + 90x_4 + 200x_5 + 150x_6 \le 600$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 : 0 \text{ یا } 1$$

در مدل فوق تمام متغیرهای تصمیم از نوع صفر و یک هستند. این نوع مدلها را مدل برنامه ریزی عدد صحیح صفر و یک می گویند. مدلهای صفر و یک، نوعی از مدلهای برنامه ریزی عدد صحیح محض هستند که متغیرهای تصمیم در آن تمام از نوع صفر یا یک می باشند.

مساله۴-۳: یک شرکت تولیدی تصمیم دارد به منظور توسعه فعالیتهای خود، کارخانه جدیدی در یکی از دو شهر نور و محمودآباد ایجاد نماید . در شهری که برای این منظور انتخاب می شود می تواند انبار جدیدی هم احداث نمود ولی حداکثر یک انبار می تواند داشته باشد. در ستون ۴ جدول زیر ، ارزش خالص فعلی هرکدام از این انتخاب ها و در ستون آخر ، سرمایه مورد نیاز برآورد شده است . حداکثر بودجه برای توسعه ۲۴ میلیون دلار است و هدف ، تعیین ترکیبی از انتخاب ها است که ارزش خالص را بیشینه (Max)نماید.

شماره تصمیم	سوال مربوط به تصمیم	متغیر تصمیم	ارزش خالص فعلی (میلیون دلار)	سرمایه مورد نیاز
۱	کارخانه در شهر نور ساخته شود؟	X_1	۷	۲۰
۲	کارخانه در شهر محمودآباد ساخته شود؟	X_2	۵	۱۵
۳	انبار در شهر نور ساخته شود؟	X_3	۴	۱۲
۴	انبار در شهر محمودآباد ساخته شود؟	X_4	۳	۱۰

متغیر های تصمیم این مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} ۱ & \text{اگر تصمیم } j \text{ بله باشد} \\ ۰ & \text{اگر تصمیم } j \text{ خیر باشد} \end{cases}$$

به دلیل اینکه تصمیم های X_1 و X_2 از نوع ناسازگار هستند (شرکت فقط یک کارخانه می تواند بسازند)، لذا محدودیت زیر نیاز است:

$$X_1+X_2 = 1$$

به طور مشابه برای تصمیم های X_3 و X_4 هم این ناسازگاری برقرار است. (شرکت حداکثر یک انبار می تواند داشته باشد) .

$$X_3+X_4 \leq 1$$

تصمیم های X_3 و X_4 تصمیم های X_1 و X_2 وابسته به هم هستند (ساختن انبار در یک شهر منوط به ساخت کارخانه است). این شرط با استفاده از محدودیت زیر بیان می شود:

$$X_3 - X_1 \leq 0$$
$$X_4 - X_2 \leq 0$$

در محدودیت های اول، اگرX_1 برابر با صفر باشد(یعنی در شهر ۱ (نور) کارخانه ساخته شود)، آنگاه $X_2 =0$ خواهد بود. ولی اگر در شهر(۱) نور کارخانه ای ساخته شود، می توان در این شهر انبار ساخته شود. ($X_3 =$ ۰ یا ۱)

بنابراین شکل کلی مدل به صورت زیر است:

$$\text{Max} \quad 7x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4$$

s.t:

$$20x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 10x_4 \leq 24$$

$$X_1 + X_2 = 1$$

$$X_3 + X_4 \quad \leq ۱$$

$$X_4 - X_2 \leq 0$$

$$X_3 - X_1 \leq 0$$

$$X_J \geq 0.\ \text{int}$$

فرموله کردن مسائل با استفاده از متغیر های صفر و یک

محدودیت های این یا آن (eiter or constraint)

حالتی را در نظر بگیرید که از بین دو محدودیت موجود می توان یکی را انتخاب کرد ولی لزومی ندارد که هر دو محدودیت برقرار باشد. فرض کنید که در مسئله ای ، یکی از دو محدودیتی زیر باید برقرار باشد.

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$

or

$X_1 + 4X_2 \leq 16$

با استفاده از عدد M بزرگ می توان محدودیت های فوق را به صورت زیر درآورد:

$3X_1 + 2X_2 \leq 18 + \mathrm{y\,M}$

or

$X_1 + 4X_2 \leq 16\ (1 - \mathrm{y})\mathrm{M}$

که y متغیر صفر و یک است. اگر $y = 1$ باشد، لذا خواهیم داشت:

$3X_1 + 2X_2 \leq 18 + \mathrm{M}$

$X_1 + 4X_2 \leq 16$

که در این صورت محدودیت $X_1 + 4X_2 \leq 16$ برقرار است و لزومی به برقراری محدودیت $3X_1 + 2X_2 \leq 18 + \mathrm{M}$ نیست.

اگر $y = 0$ باشد، محدودیت ها بصورت زیر می شود:

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$

$X_1 + 4X_2 \leq 16 + M$

که در این صورت محدودیت $3X_1 + 2X_2 \leq 18$ برقرار است و لزومی به برقراری محدودیت $X_1 + 4X_2 \leq 16$ نیست.

فصل چهارم

برنامه ریزی خطی

(شکل ماتریسی تابلوی سیمپلکس)

برنامه ریزی خطی (شکل ماتریسی تابلوی سیمپلکس)

اهداف

اهداف کلی فصل بیان شکل ماتریسی برنامه ریزی خطی و تابلوی سیمپلکس است.با استفاده از شکل ماتریسی تابلوی سیمپلکس می توان روابط و فرمول های ریاضی مورد استفاده را به شکل ملموس تر و ساده تری بیان کرد. از روابط ریاضی روش سیمپلکس و برنامه ریزی خطی می توان در روش سیمپلکس تجدید نظر شده (فصل ۶) استفاده کرد.

مقدمه

روش سیمپلکس، یکی از متداولترین و بهترین روشهای حل برنامه ریزی خطی می باشد از این رو در فصول قبل عمدتاً به معرفی این روش و موارد خاص آن و همچنین مباحث مربوط به تحلیل حساسیت پرداخته شد. در هر حال هر چندروش سیمپلکس درقلمرو جبر خطی دارای بینش ریاضی عمیقی می باشد لیکن در مباحث پیشین کمتر بیشن ریاضی آن اشاره شد و بیشتر به نحوهٔ کاربرد آن و عملیات سطری جهت انتقال از یک تابلو به تابلوی دیگر و همچنین به جنبهٔ تغییر پارامترها در تابع هدف، مقادیر سمت راست، ضرایب فنی و تغییرات پارامتریک اشاره شد. اما باید در نظر داشت که آشنایی با روابط ریاضی روش سیمپلکس امری لازم و ضروری می باشد، زیرا بیان مفاهیم پیشرفته تر برنامه ریزی خطی، منوط به یادگیری بخشی از روابط ریاضی روش سیمپلکس می باشد، از طرفی بینش ریاضی تئوری سیمپلکس مبتنی بر شکل ماتریسی برنامه ریزی خطی و تابلوی سیمپلکس می باشد. در این فصل ضمن معرفی شکل ماتریسی برنامه ریزی خطی وتابلوی سیمپلکس تلاش می شود، مهمترین روابط ریاضی سیمپلکس که در فصول بعد مورد استفاده قرارخواهند گرفت، بیان شود. همچنین جایگاه این روابط در روش پیشرفته تری از سیمپلکس تحت عنوان «سیمپلکس تجدیدنظر شده»مشخص گردد.

تعریف ماتریسی مساله برنامه ریزی خطی

در فصل دوم گفته شد که مدل عمومی برنامه ریزی خطی، علاوه بر تابع هدف دارای n متغیر تصمیم و m محدودیت کارکردی است. متغیرهای تصمیم با x_j و ضرایب تابع هدف را با C_j نشان دادیم. همچنین ضریب متغیرهای تصمیم در محدودیت های کارکردی با a_{ij} بیان شد که به آنها «ضریب فنی» نیز گفته می شد. از طرفی مقادیر سمت راست محدودیت های کارکردی را تحت عنوان ستون b معرفی نمودیم که در آن b_i مقدار ارزشی ردیف i ام در ستون مقادیر سمت راست بود. براین اساس و به منظور یادآوری یکبار دیگر مدل برنامه ریزی خطی را در فرم عمومی و نمادین می نویسیم.

$$\boldsymbol{Max\ Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots C_nx_n}$$
$$\boldsymbol{s.t}:$$
$$\begin{array}{l} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2} \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdot\ a_{mn}x_n \le b_m} \end{array}$$
$$\boldsymbol{x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)}$$

همانگونه که ملاحظه می شود مدل فوق یک مدل استاندارد LP است که تمام محدودیت های کارکردی آن از نوع کوچکتر یا مساوی (≤) هستند. در صورتی که بخواهیم مدل فوق را به صورت ماتریسی نشان دهیم، می توانیم ماتریس های چهارگانه زیر را تشکیل دهیم.

$$\mathbf{C} = (\boldsymbol{C_1, C_2, \dots, C_n})$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \cdot \\ \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \cdot \\ \boldsymbol{b_m} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

بنا به تعریف ماتریسها ،ماتریس C یک بردار سطری ۱×n است و b یک بردار ستونی ۱× m و A یک ماتریس m×n و X که متغیر تصمیم ما می باشد به صورت یک بردار ستونی ۱×n تعریف می شود. بر این اساس فرم ماتریسی برنامه ریزی خطی را می توان بطور مختصر به صورت زیر نشان داد:

$$\boldsymbol{Max\ Z = cx}$$
$$\boldsymbol{S.t}:$$
$$\boldsymbol{AX \le b}$$
$$\boldsymbol{X \ge 0}$$

حال اگر نامعادلات موجود در مدل LP را با اضافه کردن متغیرهای کمکی (S_i) به معادله تبدیل نماییم خواهیم داشت:

$$\text{Max } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n$$

S.T:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + S_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + S_2 = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + S_m = b_m$$
$$X_j \geq 0 \; (j = 1, 2, \ldots, n)$$
$$S_i \geq 0 \; (i = 1, 2, \ldots, m)$$

بنابراین می توانیم بردار ستونی متغیرهای کمکی را به صورت زیر تشکیل دهیم :

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}$$

بنابراین شکل کلی مدل برنامه ریزی خطی پس از اضافه نمودن متغیرهای کمکی به صورت زیر خواهد بود.

Max Z = C.X S.T: $(A, I) \begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix} = b \longrightarrow$ $\begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix} \geq 0$	Max Z = C.X S.T: AX+IS=b $X, S \geq 0$

حال به منظور دستیابی به مفاهیم، نماد و ماتریس ها با مدل کلی برنامه ریزی خطی به مثال ۱-۴ توجه کنید.

مثال۱-۴- مدل برنامه ریزی خطی زیر داده شده است.

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

S.T:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 430$$
$$3x_1 + 2x_3 + S_2 = 460$$
$$x_1 + 4x_2 + S_3 = 420$$
$$X_j \geq 0 \; (j = 1, 2, 3)$$
$$S_i \geq 0 \; (i = 1, 2, 3)$$

حال می توان مدل فوق را به شکل ماتریس تبدیل نمود، بنابراین:

$$c = (3 \quad 2 \quad 5) \qquad b = \begin{bmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

در بردارهای فوق مشاهده خواهید کرد که Cیک بردار سطری ۳×۱ می باشد که ضرایب x_1 ، x_2 و x_3 را در تابع هدف بیان می کند. A یک ماتریس (۳×۳) که بیانگر ضرایب فنی متغیرهای تصمیم (a_{ij}) خواهد بود و I نیز یک ماتریس m×m (در مثال فوق ۳×۳) خواهد بود. بدیهی است که در فرم استاندارد مدل برنامه ریزی خطی I همواره ماتریس یک خواهد بود.

حال شکل ماتریسی **مثال ۱-۴** را بازنویسی می کنیم.

Max Z = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{pmatrix}$

$S.T$:

Max Z =CX

$S.T$:

$$[\mathbf{A.I}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ S \end{bmatrix} = \mathbf{b} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X,S} \geq 0 \qquad \mathbf{X_j} \geq 0 \quad (j = 1,2,3)$$

$$\mathbf{S_i} \geq 0 \quad (i = 1,2,3)$$

هر کدام از متغیرهای تصمیم که اغلب به عنوان فعالیت یا محصول شناخته می شوند می بایست برای انجام یا تولید از یک سری منابع استفاده نماید.

مسئله – شکل ماتریسی مدل برنامه ریزی خطی زیر را بنویسید؟

$$\mathbf{Max} \quad Z = 2x_1 + 4x_2$$

s.t:

$2x_1 + x_2 \leq 20$ محدودیت اول

$x_1 + 3x_2 \leq 30$ محدودیت دوم

$x_1, x_2 \geq 0$

فصل پنجم
مفاهیم اولیه ماتریس در استفاده از حل سیمپلکس

مفاهیم اولیه ماتریس در استفاده از حل سیمپلکس

مروری بر مفاهیم ریاضی :

در ایجاد و توسعه مدل های تحقیق در عملیات، غالباً مفاهیم جبر خطی بکار گرفته می شوند. به جهت اهمیت این مفاهیم در ارائه روشن تر مباحث بعدی، در این فصل مروری برمفاهیم اساسی و مورد نیازماتریس ها، انجام خواهد شد.

ماتریس ها:

تعریف ماتریس:

ماتریس، آرایشی از اعداد حقیقی است که روی سطرها و ستون های منظم قرار گرفته و با دو کروشه محصور شده باشند.هر یک از اعداد حقیقی موجود در یک ماتریس را یک درایه یا عنصر آن ماتریس می نامند.

برای مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$ ماتریس هستند.

اگر یک ماتریس که با A نشان داده می شود دارای m سطر و n ستون باشد، آنرا یک ماتریس $m \times n$ یا از درجه، $m\ n$ می نامند، ماتریس A نوعاً به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \dots\dots\dots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \dots\dots\dots & \mathbf{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{m1}} & \mathbf{a_{m2}} & \dots\dots\dots & \mathbf{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

عددی که در سطر i ام و ستون j ام واقع گردیده، عنصر a_{ij} نام دارد. برای خلاصه نویسی، ماتریس A از درجه $m \times n$ را به صورت شکلهای زیر می نویسد:

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{a_{ij}}\right]_{\mathbf{m \times n}} \quad \text{یا} \quad \mathbf{A_{m \times n}}$$

دَرایه

ماتریس معمولا با یک حرف بزرگ انگلیسی (مانند A یا B) نمایش داده می شود. به هر یک از اعداد درون ماتریس یک عنصر یا درایه ماتریس گفته می شود .برای مشخص کردن هر درایه در ماتریس عدد ردیف و

ستون آن را به ترتیب بصورت زیرنویس حرف کوچک نام ماتریس می نویسیم. برای نمونه اگر یک ماتریس Aنام دارد، درایه ای که در سطر دوم و ستون سوم آن قرار دارد به صورت a_{23} مشخص می‌شود.

$$A = \begin{pmatrix} a1{,}1 & a1{,}2 & a1{,}3 \\ a2{,}1 & a2{,}2 & a2{,}3 \end{pmatrix}$$

مثال :

ماتریس B برابر است با:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{24} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-9} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

برخی از درایه های نمونه عبارتند از:

(درایه ماتریس در سطر ۱ و ستون ۱ برابر ۶ است) $b_{1,1} = 6$

(درایه ماتریس در سطر ۱ و ستون ۳ برابر ۲۴ است) $b_{1,3} = 24$

(درایه ماتریس در سطر ۲ و ستون ۳ برابر ۸ است) $b_{2,3} = 8$

مرتبه ماتریس

به تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس که به صورت (ستون× سطر) نوشته می‌شود، مرتبه ماتریس می گوییم. برای مثال مرتبه ماتریسی که ۳×۲ است ، می گوییم این یک ماتریس ۲ در ۳ است. ماتریسی که تنها یک سطر داشته باشد، ماتریس سطری و ماتریسی که تنها یک ستون داشته باشد، ماتریس ستونی نامیده می‌شود. البته ماتریس تهی هم داریم، که ماتریسی است که هیچ درایه‌ای ندارد.

به ماتریسی که تعداد سطر ها و ستونهایش برابر باشند ماتریس مربعی گفته می شودکه در آن m ، ...، ۲، ۱= i و n، ....، ۲،۱= j است. گاهی، از نماد $A = [a_{ij}]$ برای نمایش ماتریس A نیز استفاده می شود. در ماتریس ۳ در ۳ زیر:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$$

a_{11}=۱، a_{23}=۶ و a_{31}=۷ می باشد.

تعریف: دو ماتریس $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ برابرند، اگر هر دو دارای درجات مشابه بوده و برای تمامیi ها و j، $a_{ij} = b_{ij}$ باشد.

برای مثال، اگر $B = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، در صورتی $A = B$ است که X =۱، Y =۲، W =۳، Z = ۴ باشد.

جمع و تفریق دو ماتریس :

اگر ماتریس $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دوماتریس هم درجه، مثلاً ، m×n باشد، آنگاه ماتریس C که از جمع دوماتریس؛ یعنی C= A+B بدست آمده و درجهٔ آن m×n می باشد ماتریسی است که هر عنصر (ij) آن از جمع دو عنصر

$a_{ij} + b_{ij}$ حاصل آمده است. به عبارت دیگر، برای جمع دو ماتریس A و B باید عناصر متناظر A و B با هم جمع شود. برای مثال،

اگر : $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد

آنگاه $A + B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-2 & 3+3 \\ 0+2 & -1+1 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

یادآوری:

برای جمع دو ماتریس، اعداد هم مرتبه آن‌ها را با هم جمع کنید:

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

محاسبات به حالت زیر است:

3+4=7   **8+0=8**

4+1=5   **6-9=-3**

دو ماتریس برای جمع شدن باید هم‌مرتبه باشند، یعنی باید تعداد سطرها و همچنین تعداد ستون های دو ماتریس با هم برابر باشند.

به دست آوردن منفی یک ماتریس کار ساده‌ای است:

$$-\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}$$

محاسبات به نحو زیر است :

-(2) = -2   **-(-4) = +4**

-(7) = -7   **-(10) = -10**

تفریق ماتریس‌ها

برای تفریق دو ماتریس می بایست اعداد هم مرتبه ماتریس ها را از هم تفریق کنید:

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$$

محاسبات به نحو زیر است :

3 - 4 = -1   **8- 0 = 8**

4 -1 = 3   **6-(-9) = 15**

ماتریس ترانهاده (ترانسپوزه) (Transpose)

ماتریس m×n زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \dots\dots\dots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \dots\dots\dots & \mathbf{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{m1}} & \mathbf{a_{m2}} & \dots\dots\dots & \mathbf{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

ترانهادۀ این ماتریس که آنرا با $\mathrm{A^T}$ یا $\mathrm{A'}$ نشان می دهند، به صورت زیر است:

$$\mathbf{A^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{21}} & \dots\dots\dots & \mathbf{a_{m1}} \\ \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{22}} & \dots\dots\dots & \mathbf{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{1n}} & \mathbf{a_{2n}} & \dots\dots\dots & \mathbf{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می کنید، ترانهادۀ یک ماتریس با تعویض جای تمامی سطرها و ستونهای متناظر بدست می آید. به مثال زیر توجه کنید.

اگر $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $\mathrm{A^T} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

مثال

$$\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{24} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-9} & \mathbf{8} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{24} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

ضرب یک اسکالر در ماتریس

ماتریس A و عدد داده شده C را در نظر بگیرید. ماتریس CA از حاصل ضرب هر عنصر A در C بدست می آید. برای مثال، اگر $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $3\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ در صورتی که $\mathrm{C} = -۱$ باشد، گاهی ضرب آن را در A با $-\mathrm{A}$ نشان می دهند.

ضرب دو ماتریس

ضرب دو ماتریس A وB که به صورت AB نوشه می شود تنها وقتی امکان پذیر است که:

تعداد ستونهای ماتریس A = تعداد سطرهای ماتریس B

با توجه به شرط بالا، تعداد سطرهای ماتریس حاصل ضرب با تعداد سطرهای ماتریس اول و تعداد ستونهای آن با ستونهای ماتریس دوم برابر است . مقدار هر عنصر مانند C_{ij} از ماتریس حاصل ضرب، برابراست با مجموع حاصل ضربهای عناصر سطر **i** ام، ماتریس اول در عناصر متناظر ستون **j** ام ماتریس دوم، براین اساس، در حالت کلی ضرب ماتریسها دارای خاصیت جابجایی نیست.

چند مثال:

مثال۱- در صورتیکه $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد. مقدار C=AB را محاسبه کنید.

حل: از آنجا که A یک ماتریس ۳×۲ و B یک ماتریس ۲×۳ است. C یک ماتریس ۲×۲ خواهد شد. عناصر ماتریس C به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\mathbf{C_{11}} = [1 \quad 1 \quad 2]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1(1) + 1(2) + 2(1) = 5}$$

$$\mathbf{C_{12}} = [1 \quad 1 \quad 2]\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{1(1) + 1(3) + 2(2) = 8}$$

$$\mathbf{C_{21}} = [2 \quad 1 \quad 3]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{2(1) + 1(2) + 3(1) = 7}$$

$$\mathbf{C_{22}} = [2 \quad 1 \quad 3]\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{2(1) + 1(3) + 3(1) = 11}$$

پس

$$\mathbf{C = AB} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

مثال ۲: AB را محاسبه کنید.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{B} = [1, 2]$$

حل از آنجا که A دارای ۱ ستون و B دارای یک سطر استC=AB را می توان محاسبه کرد. ماتریس C ماتریسی ۲×۲ است.

$$\mathbf{C_{11} = 3(1) = 3} \qquad \mathbf{C_{21} = 4(1) = 4}$$
$$\mathbf{C_{12} = 3(2) = 6} \qquad \mathbf{C_{22} = 4(2) = 8}$$

بنابراین

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

ضرب عدد ثابت در ماتریس

ما می توانیم یک عدد ثابت را در ماتریس ضرب کنیم. در مثال زیر عدد ۲ در یک ماتریس ضرب شده است:

$$2 \times \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-18} \end{pmatrix}$$

محاسبات به نحو زیر است :

2 × 4 = 8   **2 × 0 = 0**
2 × 1 = 2   **2 × -9 = -18**

فصل ششم

روش سیمپلکس تجدیدنظرشده(اصلاح شده)

روش سیمپلکس تجدیدنظرشده

اهداف

یکی دیگر از روش های کارا به منظور حل مسائل برنامه ریزی خطی روش سیمپلکس تجدید نظر شده است.این روش با استفاده از کلیه اصول و گام های سیمپلکس و بدون انجام عملیات زائد و ذخیره سازی اطلاعات غیر مفید که حفظ آنها مستلزم بکارگیری حافظه زیاد کامپیوتر است حل مسئله را به انجام می رساند. استفاده از روش سیمپلکس معمولی و به کارگیری عملیات جبری، مستلزم نگهداری تمامی عناصر جدول سیمپلکس در حافظه فعال رایانه است که ممکن است برای مسائل بزرگ حافظه فعال کامپیوتر امکان تحلیل اطلاعات را نداشته باشد.

توضیح اینکه استفاده از مفاهیم اولیه ماتریسی ضرورتی اجتناب ناپذیر در روش سیمپلکس تجدید نظر شده می باشد که در فصل قبل آمده است.

شکل ماتریسی مساله برنامه ریزی خطی

به طور کلی یک مسئله برنامه ریزی خطی فرم استاندارد به صورت زیر نمایش داده می شود:

Max Z = CX

S.T:

$AX \leq \bar{b}$

$X \geq 0$

که در آن:

$X = [X_1, X_2, \ldots, X_n]^T$

$C = [C_1, C_2, \ldots, C_n]$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$b = (b_1, b_2, \dots b_m)^T$$

تابع هدف : $\text{Max (Min) } Z = C_B X_B + C_N X_N$

مثال:

$\text{Max } Z = 2X_1 + 1X_2$

X_1 : متغیر اساسی

X_2 : متغیر غیر اساسی

محدودیت ها $BX_B + NX_N = b$

روابطی که بین هر جدول با جدول اول برقرار است:

ماتریس متغیر های غیر اساسی در محدودیت ها	N = Non Basic
ماتریس متغیر های اساسی در محدودیت ها	B: Basic
اعداد سمت راست :	b
تابع هدف :	C
ضرایب متغیر های غیر اساسی در تابع هدف :	C_N
ضرایب متغیر های اساسی در تابع هدف:	C_B
معکوس ماتریس متغیر های اساسی :	B^{-1}
طرز بدست آوردن ضرایب متغیر غیر اساسی در تابع هدف	$C_B B^{-1} N - C_N$
طرز به دست آوردن ضرایب متغیر غیر اساسی در محدودیت ها	$B^{-1} N$
طرز به دست آوردن Z	$C_B B^{-1} b$
طرز به دست آوردن عدد سمت راست	$B^{-1} b$

مراحل حل سیمپلکس تجدید نظر شده

مساله :

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = 4X_1 + 7X_2 &&\Longrightarrow && -4X_1 - 7X_2 = 0 \\ &X_1 + X_2 \leq 6 &&\Longrightarrow && X_1 + X_2 + S_1 = 6 \\ &2X_1 + 3X_2 \leq 24 &&\Longrightarrow && 2X_1 + 3X_2 + S_2 = 24 \\ &X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

جدول شماره ۱:

XB	X_1 X_2	S_1 S_2	RHS
Z S_1 S_2	$\begin{bmatrix}-4 & -7\end{bmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{bmatrix}. & .\end{bmatrix}$ $\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ . & ۱\end{pmatrix}$	۰ $\begin{pmatrix}6\\ 24\end{pmatrix}$
	(C_N) (N)	(C_B) (B)	جدول دوم

$X_B\,(S_1 \quad S_2)$ $\qquad\qquad$ $X_N\,(X_1 \quad X_2)$

$C_B(0 \quad 0)$ $\qquad\qquad$ $C_N\,(4 \quad 7)$

$$B\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad N\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$b\begin{pmatrix}6\\ 24\end{pmatrix}$$

۱. **تعیین متغیر ورودی با استفاده از فرمول : $C_BB^{-1}N-C_N$**

$$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4 & -7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & -7\end{bmatrix}$$

X_1 X_2

$$* B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

منفی ترین عدد انتخاب می شود. $\Leftarrow$ X_2 وارد جدول می شود.

۲– تعیین خروجی با استفاده از: $(B^{-1}b/ B^{-1}N)$

$$B^{-1}b =\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\ 24\end{pmatrix}$$

X_2 X_1

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

S_1 S_2

$$\Rightarrow (B^{-1}b/ B^{-1}N) = \frac{\begin{pmatrix}6\\ 24\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}} = \begin{bmatrix}6\\ 8\end{bmatrix}$$

چون متغیر ورودی X_2 بود.

کوچکترین عدد انتخاب می شود بنابراین S_1 از جدول خارج می شود.

جدول شماره ۲:

متغیر غیر اساسیX_N (X_1 , S_1)   متغیر اساسی X_B (X_2 , S_2)

C_N (4   0) C_B(7   0)

$$N\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b\begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

چون عدد مثبت داریم ، بنابراین دیگه ادامه نمیدهیم

$C_BB^{-1}N\text{-}C_N$ =

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$* B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1 $$Z^* = C_BB^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix} = 42$$

2 $$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

ضریب متغیر غیر اساسی در محدودیت ها

3 عدد سمت راست $$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

ضریب متغیر اساسی در جدول در ستون Z = 0 و در S = 1 است. (چون باید یکه باشد).

XB	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	-4	-7	۰	۰	۰
S_1	1	1	1	۰	6
S_2	2	3	۰	1	24
Z	3	0	7	۰	42
X_2	1	1	1	۰	6
S_2	-1	0	-3	1	6

فصل هفتم

تفسیر اقتصادی جداول سیمپلکس

تفسیر اقتصادی جداول سیمپلکس

مقدمه

تابلوی بدست آمده از روش سیمپلکس ، دارای اطلاعات مفیدی است که تا حدودی با برخی از آنها در تحقیق در عملیات (۱) آشنا شدیم . در این بخش اختصاصاً به تحلیل هر یک عناصر تابلوی سیمپلکس در قالب یک مساله تولیدی خواهیم پرداخت . سپس با استفاده از مفاهیم بیان شده در فصل (۸) به تعریف « مساله ثانویه » می پردازیم.

اصطلاح ثانویه، به این واقعیت اشاره دارد که هر مساله برنامه ریزی خطی دارای دو فرم است.« فرم اولیه (اصلی)» و فرم دوم که «ثانویه» نامیده می شود. برای هر جواب اولیه یک جواب ثانویه متناظر وجود دارد.بنابراین می توان انتظار داشت که خواص و ویژگی های یک مساله اولیه شدیداً به خصوصیات مساله دیگر(ثانویه) ارتباط داشته باشد. جواب بهینه شکل اولیه مساله دارای اطلاعات کاملی درباره جواب شکل ثانویه مساله است.

جواب مساله ثانویه ، ارائه کننده اطلاعات با اهمیتی است. که با استفاده از این اطلاعات می توان پارامترهای مساله برنامه ریزی خطی را تفسیر و تعبیر کرد. از اینرو ، مساله ثانویه اطلاعاتی درباره ارزش منابع در اختیار مدیر قرار می دهدو این اطلاعات به مدیر در اتخاذ تصمیم راجع به استفاده از منابع اضافی کمک می کند.

تفسیر اقتصادی

منظور از تفسیر اقتصادی، بیان معنی و مفهوم کلیهٔ اعدادی است که در جداول سیمپلکس وجود دارد. در این بخش، مفهوم اقتصادی اعداد سیمپلکس را در قالب یک مسئله تولید مطرح می کنیم. طبیعی است که می توان این شیوه را برای تفسیر مسائلی که متغیرهای تصمیم آن ها مفاهیم دیگری را بیان می دارد نیز به کار برد. توجه کنید که چون اعداد هر ستون مفاهیم مرتبط با یک متغیر تصمیم را بیان می دارد، تفسیر باید ستونی صورت گیرد.

در جداول سیمپلکس اگر اعداد مثبت در سطری قرار گیرند که متغیر اساسی مربوط به آن سطر متغیر کمکی باشد، به مفهوم میزان استفاده از آن منبع برای تولید یک واحد از محصولی (یا افزایش یک واحد متغیر ورودی) است که در بالای ستون این عدد قرار گرفته است؛ اگر متغیر اساسی مربوط به آن سطر متغیر

تصمیم باشد، به معنی کاهش آن متغیر اساسی است، که در ازای افزایش تولید یک واحد از متغیر ورودی صورت می پذیرد. برعکس، اعداد منفی به مفهوم افزایش منبع(در مورد متغیرهای کمکی) یا افزایش تولید(در مورد متغیرهای تصمیم) است.

با توجه به نکات فوق به تفسیر اقتصادی مسئله زیر می پردازیم.

مساله۱-۷ برای تولید سه محصول میز و صندلی و نیمکت از دو منبع نیروی انسانی و چوب استفاده می شود. جدول ۱-۷ منابع مورد نیاز برای ساخت هر واحد از محصول را بیان می دارد.

جدول ۱- ۷ داده های مربوط به مسئله مثال

منابع مورد نیاز	میز(۱)	صندلی(۲)	نیمکت(۳)	حداکثر منابع موجود
نیروی انسانی (نفر – ساعت)	۱	۲	۲	۸
چوب (متر مربع)	۳	۴	۱	۷
سود حاصل از تولید هر واحد	۵	۲	۳	

سود هر واحد میز و صندلی و نیمکت به ترتیب معادل ۵ ، ۲ و ۳ است. مدل مسئله چنین است:

$$\text{Max } Z = ۵x_۱ + ۲x_۲ + ۳x_۳$$

$$\text{s.t.} \quad x_۱ + ۲x_۲ + ۲x_۳ \leq ۸$$

$$۳x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ \leq ۷$$

$$x_۱, x_۲, x_۳ \geq ۰$$

$$\text{Max } Z - 5X_1 - 2X_2 - 3X_3 = 0$$

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 + S_1 = 8$$

$$3X_1 + 4X_2 + X_3 + S_2 = 7$$

$$X_1, X_2, X_3, \geq 0$$

$$S_1, S_2 \geq 0$$

جداول زیر حل مسئله را به روش سیمپلکس نشان می دهند.

جدول ۲-۷ جداول سیمپلکس برای مسئله مثال

Xb	Z	X_1	X_2	X3	S_1	S_2	RHS	
Z_0	۱	−۵	−۲	−۳	۰	۰	۰	۱
S_1	۰	۱	۲	۲	۱	۰	۸	
S_2	۰	۳	۴	۱	۰	۱	۷	
Z_0	۱	۰	$\frac{14}{3}$	$-\frac{4}{3}$	۰	$\frac{5}{3}$	$\frac{35}{3}$	۲
S_1	۰	۰	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{17}{3}$	
X_1	۰	۱	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	
Z_0	۱	۰	$\frac{26}{5}$	۰	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{81}{5}$	۳
X_3	۰	۰	$\frac{2}{5}$	۱	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{17}{5}$	
X_1	۰	۱	$\frac{6}{5}$	۰	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	

جدول اول:

اعداد زیر ستون متغیر $\mathbf{x_1}$

اعداد۱و ۳ بدین مفهوم هستند که برای تولید یک واحد محصول اول ($\mathbf{x_1}$) از منبع اول و دوم به ترتیب ۱ و ۳ واحد باید استفاده شود. سایر ستون ها مفهوم مشابهی با آنچه برای $\mathbf{x_1}$ گفته شد، دارد.

جدول دوم

۱) **اعداد زیرستون متغیر $\mathbf{x_2}$**

اعداد $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{3}$ به این مفهوم هستند که برای تولید یک واحد $\mathbf{x_2}$ باید به میزان $\frac{4}{3}$ از تولید $\mathbf{x_1}$کاست (چون تمام منبع دوم صرف تولید$\mathbf{x_1}$ شده و منبعی برای تولید $\mathbf{x_2}$ باقی نمانده است) و در عین حال از منبع موجود اول به میزان$\frac{2}{3}$واحد صرف تولید محصول دوم کرد و در صورت انجام این کار، نتیجه کاهش سود به میزان $\frac{14}{3}$ در ازای هر واحد افزایش محصول دوم ($\mathbf{x_2}$) یا تولید محصول دوم است.

جدول ۳-۷ علت این کاهش را بیان می دارد.

جدول ۳-۷ تفسیر اقتصادی ستون زیر متغیر x_2 در جدول دوم

منابع مورد نیاز برای تولید یک واحد محصول دوم		طریق تامین	
		کاهش در تولید محصول اول به میزان $\frac{1}{3}$	استفاده از منبع موجود
S_1	۲ واحد	منبع به دست آمده $\frac{4}{3}\times 1=\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
S_2	۴ واحد	منبع به دست آمده $\frac{4}{3}\times 3=4$	$-$

تولید هر واحد محصول دوم نیازمند ۲ واحد از منبع اول و۴ واحد از منبع دوم است(ستون اول جدول ۳-۷).

اما با توجه به دومین جدول ۲-۷ دیده می شود که از منبع اول ($S_1=\frac{17}{3}$) باقی مانده ولی تمام منبع دوم به صفر ($S_2=0$) رسیده است. علت کاهش در منابع، تولید محصول اول به میزان ($x_1=\frac{7}{3}$) است. پس تولید محصول دوم که هر واحد آن نیازمند ۴ واحد منبع دوم است، در این شرایط ممکن نیست. لذا برای تولید یک واحد x_2 باید از محصول اول کم تر از $\frac{7}{3}$ تولید کرد. میزان کاهش در محصول اول به منظور تولید یک واحد محصول دوم $\frac{4}{3}$(عدد زیر x_2 در سطر ۲ جدول دوم) است.اما از آن جا که در تولید محصول اول از هر دو منبع استفاده شده، کاهش محصول اول نیز منجر به آزاد شدن هر دو منبع می شود. میزان منابع آزاد شدۀ ناشی از کاهش در تولید معادل حاصلضرب « مقدار کاهش یافتۀ محصول اول» و « ضرایب فنی این محصول» است(ستون دوم جدول ۳-۷). میزان منابع به دست آمده از کاهش در تولید محصول اول به ترتیب $\frac{4}{3}$ و ۴ است که ۴ واحد منبع دوم برای تولید یک واحد محصول دوم کفایت می کند، اما $\frac{4}{3}$ منبع اول به دست آمده از این طریق کافی نیست (مقدار مورد نیاز ۲ واحد است).

پس کسری آن را باید از موجودی منبع اول تأمین کرد. میزان کمبود $\frac{2}{3}$ است که در ستون جدول ۳-۷ ارائه شده است. همان طور که مشاهده می شود، جمع منابع در اختیار (جمع منابع به دست آمده واستفاده از منابع موجود) دقیقاً معادل منابع مورد نیاز برای ساختن یک واحد x_2 است. برای بیان تاثیرات اقتصادی این تبدیل (کاهش تولید x_1 و افزایش x_2) محاسبات زیر را باید انجام داد.

سود از دست رفته

۱) ناشی از کاهش تولید محصول اول به میزان $\frac{4}{3}$ $\qquad \frac{4}{3}\times 5=\frac{20}{3}$

۲) ناشی از مصرف S_1 به میزان $\frac{2}{3}$ $\qquad \frac{2}{3}\times 0=0$

جمع سود از دست رفته $\qquad \frac{20}{3}$

سود به دست آمدۀ ناشی از تولید یک واحد محصول دوم

نتیجه (کاهش سود) $\qquad \frac{20}{3}-2=\frac{14}{3}$

به این ترتیب، بر اثر این جابه جایی در تولید به ازای هر واحد $\mathbf{x_2}$ ، $\frac{14}{3}$ از سود کاهش می یابد. این کار به صرفه نیست و به این دلیل است که $\mathbf{x_2}$ به عنوان متغیر ورودی در جدول سیمپلکس انتخاب نمی شود.

تذکر: از آن جا که ضریب متغیرهای کمکی در تابع هدف صورت مسئله صفر است، ارزش اقتصادی آن ها در محاسبات صفر منظور شده است.

۲) اعداد زیر ستون متغیر $\mathbf{x_3}$

با توجه به بحث بالا، مفهوم این است که برای تولید یک واحد ($\mathbf{x_3}$) یا محصول سوم باید به میزان $\frac{1}{3}$ از تولید $\mathbf{x_1}$ کاست و از منبع موجود اول به میزان $\frac{5}{3}$ استفاده کرد. در این صورت به ازای افزایش یک واحد $\mathbf{x_3}$ به طور خالص به میزان $\frac{4}{3}$ برسود افزوده می شود. جدول مربوط به این ستون چنین است:

جدول ۴- ۷تفسیر اقتصادی ستون زیر متغیر $\mathbf{x_3}$ در جدول دوم

منابع مورد نیاز برای تولید یک واحد محصول سوم	طریق تامین: کاهش در تولید محصول اول به میزان $\frac{1}{3}$	طریق تامین: استفاده از منبع موجود
S_1 ۲ واحد	منبع به دست آمده $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
S_2 ۱واحد	منبع به دست آمده $\frac{1}{3} \times 3 = 1$	–

سود از دست رفته:

۱) ناشی از کاهش تولید محصول اول به میزان $\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3}$

۲) ناشی از مصرف $\frac{5}{3}$ منبع اول $\qquad \frac{5}{3} \times 0 = 0$

جمع سود از دست رفته : $\frac{5}{3}$

سود به دست آمدهٔ ناشی از تولید یک واحد محصول سوم ۳×۱=۳

نتیجه (افزایش سود) $\frac{5}{3} - 3 = -\frac{4}{3}$

۳) اعداد زیر ستون متغیر $\mathbf{s_2}$

به منظور افزایش یک واحد $\mathbf{s_2}$باید تولید $\mathbf{x_1}$ را به میزان $\frac{1}{3}$ کاهش داد و این کاهش موجب افزایش منبع $\mathbf{s_1}$ به میزان $\frac{1}{3}$ می شود.

جدول ۵- ۷ تفسیر اقتصادی ستون زیر متغیر s_2 در جدول دوم

منابع مورد نیاز (یک واحد S2)		طریق کسب منبع	
		کاهش تولید محصول اول به میزان $\frac{1}{3}$	افزایش منبع اول
S1	۰	$\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
S2	1 واحد	$\frac{1}{3}\times 3=1$	$-$

سود از دست رفته ناشی از کاهش محصول اول

سود به دست آمده

$$\frac{1}{3}\times 5=\frac{5}{3}$$

۱) ناشی از به دست آمدن یک واحد s_1 $\quad 1\times 0=0$

۲) ناشی از به دست آمدن یک واحد s_2 $\quad \frac{1}{3}\times 0=0$

جمع سود به دست آمده $\quad 0$

نتیجه(کاهش سود) $\quad \frac{5}{3}-0=\frac{5}{3}$

۴) اعداد زیر ستون متغیر x_1

به طور کلی ستون متغیرهای اساسی با برخوردی شبیه به قبل، به مفهوم عدم تغییر در ترکیب تولید است، زیرا افزایش هر واحد x_1، به مفهوم کاهش یک واحد x_1 است. این مفهوم، به معنی عدم تغییر در ترکیب تولید است، و هیچ تغییری در میزان سود نیز نخواهد داشت.

جدول سوم

۱) اعداد زیر ستون متغیر x_2

به منظور افزایش تولید x_2 به میزان یک واحد باید به میزان $\frac{2}{5}$ از تولید x_3 و $\frac{6}{5}$ از تولید X_1 کاست ونتیجه آن کاهش سود به میزان $\frac{26}{5}$ است.

جدول۶- ۷ تفسیر اقتصادی اعداد زیر ستون x_2 در جدول سوم

منابع مورد نیاز برای تولید یک واحد محصول دوم		طریق تامین	
		کاهش در تولید محصول سوم به میزان $\frac{2}{5}$	کاهش محصول اول به میزان $\frac{6}{5}$
S_1	۲ واحد	$\frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5}$	$\frac{6}{5} \times 1 = \frac{6}{5}$
S_2	۴ واحد	$\frac{2}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$	$\frac{6}{5} \times 3 = \frac{18}{5}$

سود از دست رفته

۱) ناشی از کاهش تولید محصول سوم $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$

۲) ناشی از کاهش تولید محصول اول $\frac{6}{5} \times 5 = \frac{30}{5}$

جمع سود به دست آمده

$$\frac{6}{5} + \frac{30}{5} = \frac{36}{5}$$

سود به دست آمدهٔ ناشی از افزایش یک واحد محصول دوم ۱×۲=۲

نتیجه(کاهش سود) $\frac{36}{5} - 2 = \frac{26}{5}$

۲) اعداد زیر ستون s_1

به منظور افزایش s_1 به میزان یک واحد باید از تولید x_3 به میزان $\frac{3}{5}$کاست و این کاهش موجب به دست آوردن منابعی می شود که می توان با آن $\frac{1}{5}$ از x_1 تولید کرد.

جدول ۷-۷تفسیر اقتصادی اعداد زیر ستون s_1 در جدول سوم

منابع مورد نیاز برای تولید یک واحد محصول دوم		طریق تامین	
		کاهش در تولید محصول سوم به میزان $\frac{3}{5}$	افزایش محصول اول به میزان $\frac{1}{5}$
S_1	۱	$\frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{5}$	$\frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$
S_2	۰	$\frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5}$	$\frac{1}{5} \times 3 = \frac{3}{5}$

سود از دست رفتهٔ ناشی از کاهش تولید محصول سوم $\frac{3}{5} \times 3 = \frac{9}{5}$

سود به دست آمده

۱)ناشی از افزایش منبع اول به میزان ۱ واحد — ۱×۰=۰

۲)ناشی از افزایش محصول اول به میزان $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{5} \times 5 = 1$

جمع سود به دست آمده — $0 + 1 = 1$

نتیجه (کاهش سود) — $\frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$

۳) اعداد زیر ستون s_2

به منظور افزایش s_2 به میزان یک واحد باید از تولید x_1 به میزان $\frac{2}{5}$ کاست و این کاهش موجب به دست آوردن منابعی است که با آن منابع می توان $\frac{1}{5}$ از محصول سوم را تولید کرد.

جدول ۸-۷تقسیر اقتصادی اعداد زیر ستون s_2 در جدول سوم

منابع مورد نیاز(یک واحد S_2)		طریق تامین	
		کاهش در تولید محصول اول به میزان $\frac{2}{5}$	افزایش محصول سوم به میزان $\frac{1}{5}$
S_1	۰	$\frac{2}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$	$\frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$
S_2	۱	$\frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}$	$\frac{1}{5} \times 1 = \frac{1}{5}$

سود از دست رفتهٔ ناشی از کاهش تولید محصول اول — $\frac{2}{5} \times 5 = \frac{10}{5}$

سود به دست آمده

۱)ناشی از افزایش منبع دوم به میزان یک واحد — ۱×۰=۰

۲)ناشی از افزایش تولید محصول سوم به میزان $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{5} \times 3 = \frac{3}{5}$

جمع سود به دست آمده — $0 + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

نتیجه(کاهش سود) — $\frac{10}{5} - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$

مفهوم قیمت سایه:

در مدل های برنامه ریزی خطی ارائه مفاهیم اقتصادی و ارزش اقتصادی منابع که با مقدار تابع هدف (Z) اندازه گیری می شوند، بسیار مفید است. روش سیمپلکس این اطلاعات را توسط «قیمت های سایه» (shadow prices) ارائه می کند.

قیمت های سایه در هر مسئله به تعداد محدودیت های آن مسئله هستند. قیمت سایه هر محدودیت نشان دهنده میزان بهبود مقدار بهینهٔ تابع هدف به ازای افزایش عدد سمت راست آن محدودیت به میزان یک واحد است، به شرطی که سایر پارامترهای مدل بدون تغییر باقی بمانند.

قیمت های سایه یا قیمت های ثانویه(dual pries) بیانگر ارزش اقتصادی هر واحد عدد سمت راست است. اگر اعداد سمت راست نشان دهندهٔ میزان تابع منابع موجود باشد، قیمت های سایه منعکس کنندهٔ ارزش اقتصادی هر واحد از منبع است و میزان تغییرات مقدار تابع هدف را به ازای افزایش یک واحد منبع نشان می دهد.

در مدل های برنامه ریزی خطی، ارائه مفاهیم اقتصادی و ارزش اقتصادی منابع که با مقدار تابع هدف اندازه گیری می شوند بسیار مفید است . روش سیمپلکس این اطلاعات را توسط قیمت های سایه ارائه می کند. قیمت های سایه در هر مسأله به تعداد محدودیت های موجود در آن مسأله می باشند.

قیمت سایه هر محدودیت نشان دهنده میزان بهبود مقدار بهینه تابع هدف به ازای افزایش عدد سمت راست آن محدودیت به میزان یک واحد، به شرطی که سایر پارامترهای مدل بدون تغییر باقی بمانند می باشد. قیمت های سایه یا قیمت های ثانویه بیانگر ارزش اقتصادی هر واحد عدد سمت راست است. درصورتی که اعدادسمت راست نشان دهنده میزان منابع موجود باشد، قیمت های سایه منعکس کننده ارزش اقتصادی هر واحد از منبع است و نرخ تغییرات مقدار تابع هدف را به ازای افزایش یک واحد منبع نشان می دهد. هرگاه منابع موجود به بهترین طریق (بهترین ترکیب تولید، یعنی تولید براساس جواب بهینه) بکار گرفته شوند، هر واحد آن منابع موجب افزایش سود خواهد شد. این توان ارزش آفرینی برای هر واحد از منبع را «قیمت سایه» آن منبع می گویند.

فصل هشتم

مسأله ثانویه (Dual Problem)

مسأله ثانویه (Dual Problem)

اهداف

دانشجویان در این فصل یکی از فنون حل برنامه ریزی خطی را تحت عنوان سیمپلکس ثانویه فرا خواهند گرفت.

مقدمه

هر مسأله برنامه ریزی خطی در دو شکل مختلف قابل تبیین است. تاکنون، با یک شکل آن آشنا شده اید. این شکل، را شکل اولیه ویا به طور دقیق تر مساله اولیه می نامند ومساله دیگری که با این مساله در رابطه ای تنگاتنگ دارد و خود آن نیز یک مساله برنامه ریزی خطی است، مساله ثانویه نامیده می شود.

به دلایل مختلف مساله ثانویه نقش مهمی در محاسبات برنامه ریزی خطی ایفا می کند:

۱) **راه حل ، کوتاه و در محاسبات روش سیمپلکس صرفه جویی می شود.**

۲) **مساله ثانویه دارای تفسیر اقتصادی بسیار مهمی است که با استفاده از آن اتخاذ پاره ای از تصمیم گیرهای مدیریتی تسهیل خواهد شد.**

۳) **دربعضی موارد مساله ثانویه به حل پاره ای از مشکلات ناشی از محدودیت های ظرفیتی کامپیوتر کمک میکند.**

۴) **با استفاده از مفاهیم و روشهای حل مساله با استفاده از روابط ریاضی است. بنابراین می توان با استفاده از جواب مساله اولیه مساله ثانویه را به دست آوردو برعکس.**

در واقع مساله ثانویه شکل تغییر یافته مساله اولیه با استفاده از روابط ریاضی است. بنابراین می توان با استفاده از جواب مساله اولیه مساله ثانویه را به دست آورد و برعکس.

همان گونه که در مباحث پیشین گفته شد، هریک از محدودیت های مساله بیانگر انجام یک فعالیت یا تولید یک محصول هستند، که در مدل با متغیر X بیان می شوند. انجام هریک از فعالیت ها یا تولید هر محصول سودی دارد که از مجموعه آنها سود کل به دست می آید. چنانچه شیوه انجام فعالیت یا ترکیب تولید محصولات بهترین باشد.بیشترین تعداد برای Z به دست خواهد آمد . سهم هر واحد از ظرفیتها ، امکانات یامنابع لازم را در ایجاد سود بهینه کل ناشی از انجام فعالیت ها یا محصولات قیمت سایه آن منبع ، ظرفیت

امکانات می نامند . به این ترتیب همانطور که گفته شد، قیمت سایه عبارت است از توان ارزش آفرینی هر واحد از امکانات، ظرفیت ها و منابع مورد استفاده در انجام فعالیت ها یا تولیدات ، هرگاه در بهترین طریق به کار گرفته شوند.

شکل گیری مسئله ثانویه

مثال

مساله اولیه زیر را با دو متغیر (فعالیت) و سه قید در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = 300X_1 + 250X_2$$

S.T:

$2X_1 + X_2 \leq 4$ **قید نیروی انسانی**

$X_1 + 3X_2 \leq 45$ **قید زمان ماشین آلات**

$X_1 \leq 12$ **قید بازار یابی و تقاضا**

$X_1, X_2 \geq 0$

مقادیر سمت راست قید های مثال فوق را در نظر بگیرید. ارزش عامل شماره یک (ارزش کار هرواحد نیروی انسانی) ، y_1 این عامل 40 واحد است. بنابراین ارزش کل عامل شماره یک $40y_1$ است. به همین ترتیب ارزش عوامل شماره ۲ و ۳ به ترتیب y_2, y_3 و ارزش کل آنها $45y_2$ و $12y_3$ است بنابراین ارزش کل عوامل به کار رفته در این مساله

$40y_1 + 45y_2 + 12y_3$ خواهد بود که می توانیم به صورت عبارت جبری زیر نشان دهیم.

$$Z^* = 40y_1 + 45y_2 + 12y_3$$

در مساله اولیه حداکثر کردن سود حاصل از فعالیت های X_1, X_2 مورد نظر بوده است ، از آنجاکه حداکثر کردن سود با حداقل کردن منابع و در نتیجه حداقل کردن ارزش آنها ارتباط دارد،و با توجه به اینکه عبارت جبری فوق بیانگر ارزش کل منابع است می توان تابع هدف حداقل زیر را نوشت:

$$\text{Min } Z^* = 40y_1 + 45y_2 + 12y_3$$

هدف این تابع آن است که با کمترین منابع یا به بیان دیگر با حداقل ساختن ارزش منابع مصرفی (Z^*) برای X_1, X_2 ، حداکثر سود (Z) بدست آید. این تابع ، تابع هدف مساله ثانویه است که با توجه به شکل کلی مدل های برنامه ریزی خطی قید های خاص خود را خواهد داشت.

قید های مساله ثانویه

هریک از متغیر های تصمیم یا به تعبیری فعالیت های مساله اولیه ، قید متناظری در مساله ثانویه دارد. نحوه شکل گیری قید ها بدین صورت است که متغیر X_1 متناسب با ضریب خود(ضریب فنی) از منابع موجود استفاده کند.به این ترتیب ، یک واحد فعالیت a_1 دو واحد نیروی انسانی و یک واحد ظرفیت ماشین آلات و

یک واحد قید بازار یابی را به خود اختصاص می دهد. با توجه به ارزش متناظر هر یک از عوامل ، ارزش آنها برای فعالیت X_1 به ترتیب $2y_1$ و y_2 و y_3 و کل ارزش به کار رفته $2y_1 + y_2 + y_3$ است.
حال با توجه به تعریف فعالیت ها در مساله ، انجام این فعالیت ها زمانی مقرون به صرفه خواهد بود که جمع ارزش به کار رفته برای فعالیت ،دستیابی به حداقل سود حاصل از انجام آن فعالیت باشد(یعنی 300 واحد) .
نمایش ریاضی این مفهوم که اولین قید مساله ثانویه محسوب می شود به صورت زیر است:

$$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 300$$

جمع ارزش عوامل مورد استفاده در X_2 یا فعالیت دوم مساله اولیه $y_1 + 3y_2$ است. y_3 در این عبارت ذکر نمی شود ، زیرا قید ضریب متغیر X_2 در قید سوم مساله اولیه صفر است.
بنابراین دومین قید مساله ثانویه عبارت است از

$$y_1 + 3y_2 \geq 250$$

متغیر های ثانویه y_1 و y_2 و y_3 یا فاقد ارزش و مساوی صفر هستند، یا دارای ارزشند و مقادیری مثبت دارند. این دو حالت چنین نمایش داده می شود.

$$y_1 , y_2 , y_3 \geq 0$$

با این توضیحات مدل مساله ثانویه مورد نظر چنین خواهد بود.

$$\text{Min } Z^* = 40 y_1 + 45 y_2 + 12 y_3$$

S.T:

$$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 300$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 250$$

$$y_1 , y_2 , y_3 \geq 0$$

از مقایسه مساله اولیه و مساله ثانویه موارد زیر را می توان نتیجه گرفت:

1. **چنانچه تابع هدف در مساله اولیه حداکثر باشد در مساله ثانویه حداقل خواهد بود.**
2. **مقادیر سمت راست قید های مساله ثانویه ،ضرایب تابع هدف مساله اولیه است و برعکس.**
3. **علامت قید ها در مساله اولیه ی با تابع هدف حداکثری ، به صورت $\leq$ است و در مساله ثانویه به صورت $\geq$ می باشد.**

(توضیح اینکه اگر تابع هدف مساله اولیه حداکثر باشد ، قبل از تشکیل مساله ثانویه علامت تمام قید های آن باید به $\leq$ و اگر حداقل باشد به $\geq$ تبدیل می شود.)

۱. **ترتیب ضرایب قید ها در مساله ثانویه عکس مساله اولیه است**. در مثال مورد نظر ، ماتریس ضرایب قید های مساله اولیه ، $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و ماتریس ضرایب قید های مساله ثانویه $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ است.

مساله ثانویه	مساله اولیه
$\text{Min } Z^* = 40y_1 + 45y_2 + 12y_3$ S.T: $2y_1 + y_2 + y_3 \geq 300$ $y_1 + 3y_2 \geq 250$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$	$\text{Max } Z = 300X_1 + 250X_2$ S.T: $2X_1 + X_2 \leq 40$ $X_1 + 3X_2 \leq 45$ $X_1 \leq 12$ $X_1, X_2 \geq 0$

حالت ها و شرایط فرمول های استاندارد سیمپلکس:

غیر از فرم استاندارد موجود، فرمهای استاندارد دیگری وجود دارند که مهمترین فرم آن بصورت زیر می باشد:

الف- همگی محدودیت ها به صورت تساوی هستند.

ب- اعداد سمت راست تمامی محدودیت ها غیر منفی هستند.

ج- همه متغیرها غیر منفی هستند.

د- تابع هدف از نوع حداقل یا حداکثرمی باشد.

تفاوت این فرم با فرم قبل در بند (د) بوده و مسائل با تابع هدف Min مستقیماً وارد جدول سیمپلکس می شود. شرط بهینگی در این مسائل به این شرح است:

جدول ۱-۸ شرط بهینگی در فرم های مختلف استاندارد

وضعیت متغیر های تصمیم در تابع هدف	تابع هدف به صورت Max	تابع هدف به صورت Min
عبارت سمت راست در تابع هدف کلاً به سمت چپ تساوی منتقل شود. (Z = $\sum Cjxj = 0$)	شرط بهینگی : غیر منفی بودن تمامی اعداد سطر صفر در جدول نهایی انتخاب متغیرورودی: منفی ترین عدد در سطر صفر	شرط بهینگی : منفی بودن تمامی اعداد سطر صفر در جدول نهایی انتخاب متغیرورودی: مثبت ترین عدد در سطر صفر
تابع هدف بدون انتقال به سمت چپ به همان صورت وارد جدول می شود. (Z = $\sum Cjxj$)	شرط بهینگی : منفی بودن تمامی اعداد سطر صفر در جدول نهایی انتخاب متغیرورودی: مثبت ترین عدد در سطر صفر	شرط بهینگی : غیر منفی بودن تمامی اعداد سطر صفر در جدول نهایی انتخاب متغیرورودی: منفی ترین عدد در سطر صفر

نوشتن مساله ثانویه با استفاده از تعریف

هر مساله اولیه در برنامه ریزی خطی دارای یک مساله ثانویه است که این دو به صورت زیر نشان داده می شوند.

$\text{Max } z = \sum_{j=1}^{n} cjxj$ $\sum_{j=1}^{n} aijxi \geq bi$ $i = 1,2,\dots,m$ $xj \geq 0$	$\text{Min } Y_0 = \sum_{i=1}^{n} biyj$ $\sum_{i=1}^{n} aijyi \geq cj$ $J = 1,2,\dots,n$ $Y_i \geq 0$

شکل۲-۸ نوشتن مساله ثانویه با استفاده از تعریف

قبل از تبدیل مسائل برنامه ریزی خطی به فرم ثانویه، بایستی تابع هدف و محدودیت ها هماهنگ شوند. یعنی برای مسائل حداکثر کردن، بایستی محدودیت ها را به صورت «کوچکتر یا مساوی» و برای مسائل حداقل کردن محدودیت ها را به صورت «بزرگتر یا مساوی» نوشت.

مثال ثانویه مساله زیر:

$$\begin{array}{lcl}
MinZ = 4x_1 + x_2 & & MinY_0 = 4x_1 + x_2 \\
3x_1 + x_2 \leq 4 & & -3x_1 - x_2 \geq -4 \\
4x_1 + 3x_3 \geq 6 & \Rightarrow & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
x_1 + 2x_2 \leq 3 & & -x_1 - 2x_2 \geq -3 \\
x_1, x_2 \geq 0 & & x_1 و x_2 \geq 0
\end{array}$$

بدین صورت خواهد شد:

$$MaxZ = -4Y_1 + 6Y_2 - 3Y_3$$
$$-3Y_1 + 4Y_2 - Y_3 \leq 4$$
$$-Y_1 + 3Y_2 - 2Y_3 \leq 1$$
$$Y_1 \text{ و } Y_2 \text{ و } Y_3 \geq 0$$

یادآوری:گامهای لازم برای نوشتن مساله ثانویه

هرگاه مساله اولیه فاقد محدودیت تساوی یا متغیر آزاد در علامت باشد.

گام۱- در صورتی که تابع هدف مساله اولیه حداکثر کردن باشد، محدودیت ها را بصورت «کوچکتر یا مساوی» و در صورتی که حداقل کردن باشد، بصورت «بزرگتر یا مساوی» در آورید.

گام۲- محدودیت های مساله اولیه از نوع ($\leq$) و محدودیت های مساله ثانویه از نوع ($\geq$) هستند.

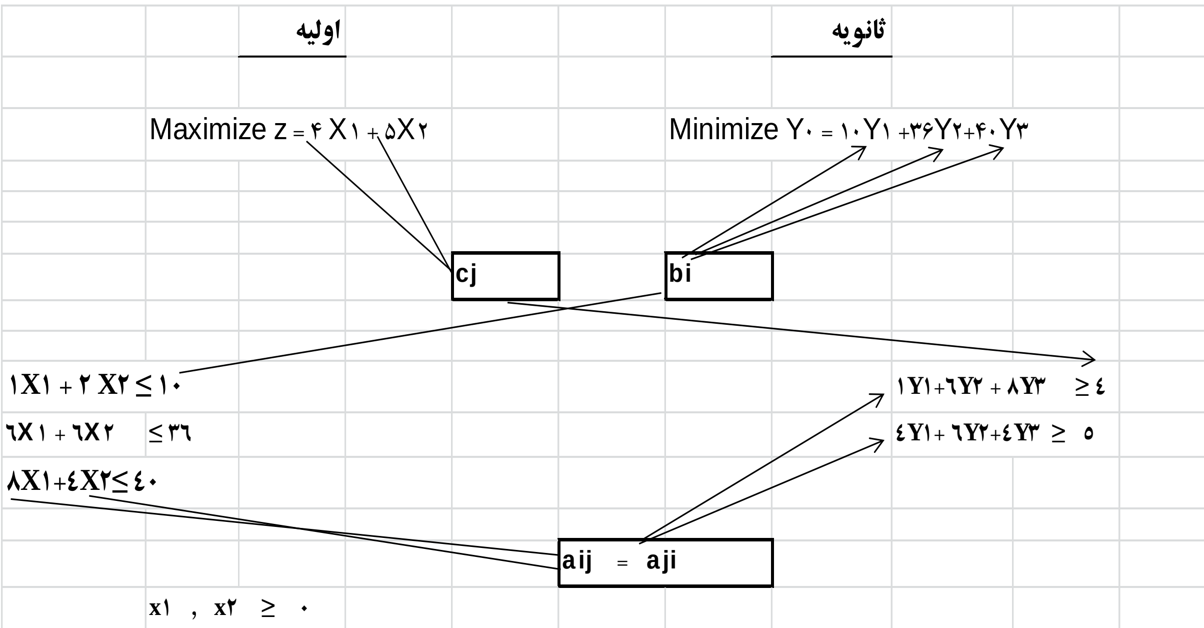
گام ۳- برای هر محدودیت در مساله اولیه یک متغیر در مساله اولیه در نظر بگیرید.

گام۴- ضرایب تابع هدف مساله ثانویه از اعداد سمت راست مساله اولیه تشکیل می یابد.

گام۵- اعداد سمت راست محدودیت های مساله ثانویه از ضرایب تابع هدف مساله اولیه به دست می آید.

گام ۶- تمام متغیرهای مساله اولیه و ثانویه غیرمنفی خواهند بود.

شکل۳-۸ روابط فوق را با استفاده از مثالی دیگر نشان می دهد.



مسائل ثانویه برای فرمهای دیگر

۱. نوشتن مساله ثانویه در صورتی که مساله اولیه ، محدودیت هایی بصورت تساوی داشته باشد، که متغیر مربوط به آن محدودیت در مساله ثانویه بصورت آزاد در علامت خواهد بود.

۲. متغیر در ثانویه بصورت آزاد در علامت $2x_1 + x_2 = 5 \to y_1$ محدودیت در مسئله اولیه

۳. نوشتن مساله ثانویه در صورتی که مساله اولیه متغیر آزاد در علامت داشته باشد، که محدودیت مربوط به آن متغیر در ثانویه بصورت تساوی برقرار خواهد شد.

روابط بین مساله اولیه و ثانویه

۱. ثانویه مساله ثانویه، مساله اولیه است

مثال- برای مثال به ثانویه، ثانویه مساله زیر توجه کنید.

ثانویه، ثانویه	ثانویه	اولیه
$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$	$\text{Min } Y_0 = 20Y_1 + 16Y_2$	$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$
$5X_1 + 4X_2 \leq 20$	$5Y_1 + 2Y_2 \geq 3$	$5X_1 + 4X_2 \leq 20$
$2X_1 + 4X_2 \leq 16$	$4Y_1 + 4Y_2 \geq 2$	$2X_1 + 4X_2 \leq 16$
$X_1, X_2 \geq 0$	$Y_1, Y_2 \geq 0$	$X_1, X_2 \geq 0$

۲. رابطه بین مقادیر توابع هدف مساله اولیه و ثانویه

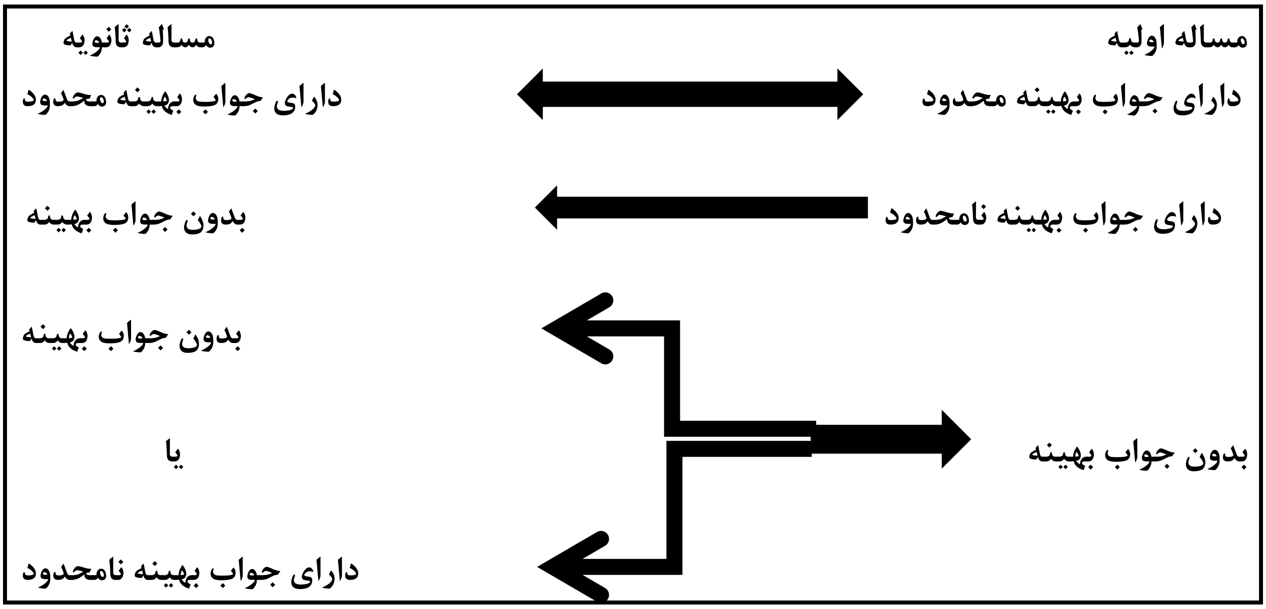
$x_1, x_2, \dots, x_n$ هر جواب موجه برای مساله ای بصورت فرم استاندارد باشد که تابع هدف آن با Z به نمایش گذارده می شود و اگر $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ هر جواب موجه برای ثانویه آن مساله که تابع هدف آن با Y_0 نشان داده می شود، باشد آنگاه $Z \leq Y_0$ خواهد بود و یا

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n \leq b_1Y_1 + b_2Y_2 + \cdots + b_mY_m$$

قضیه فوق در حالت دو متغیره اثبات می گردد، بدیهی است که این شیوه قابل تعمیم برای حالت n متغیره است.

۳. روابط بین جواب های مساله اولیه و ثانویه

هرگاه مساله اولیه جواب بهینه محدود داشته باشد، در این حالت مساله ثانویه نیز دارای جواب بهینه محدود خواهد بود. اما اگر مساله اولیه دارای مقدار تابع هدف نامحدود باشد، مساله ثانویه بدون جواب بهینه خواهد بود. هر دو مساله نیز می توانند بدون جواب بهینه باشند. پس هر دو مساله نمی تواند دارای جواب بهینه نامحدود باشند.



شکل ۵-۸ روابط بین جوابهای مساله اولیه و ثانویه

۴. رابطه کمکی مکمل

تعداد متغیرهای اساسی یک مساله با تعداد متغیرهای غیراساسی در مساله دیگر (ثانویه) مساوی می باشند. جدول زیر این نکته را بهتر روشن می کند

متغیر اولیه	متغیر ثانویه
اساسی = **غیر اساسی**	**غیر اساسی** = m **متغیر** **اساسی** = n **متغیر**

از آنجا که تعداد متغیرهای اساسی در یک مساله با تعداد متغیرهای غیراساسی در مساله دیگر برابر می باشند به طور کلی می توان گفت هر جواب اساسی در مساله اولیه دارای یک جواب اساسی مکمل در مساله ثانویه است که بین متغیرهای آنها یک رابطه کمکی وجود دارد.

دلایل استفاده از مساله ثانویه

۱) یکی از مهم ترین ویژگی های مساله ثانویه، استفاده از مفاهیم اقتصادی منبعث از آن است. این ویژگی را در مفهوم قیمت سایه می توان ارائه کرد. قیمت های سایه در هر مساله به تعداد محدودیت های موجود در آن مساله می باشد. قیمت های سایه متناظر با هر محدودیت نشان دهنده میزان بهبود مقدار بهینه تابع هدف به ازای افزایش عدد سمت راست آن محدودیت به میزان یک واحد است، مشروط بر آن که، سایر پارامترهای مدل بدون تغییر بماند.

قیمت های سایه یا قیمت های ثانویه بیانگر ارزش اقتصادی هر واحد سمت راست است. اگر اعداد سمت راست نشان دهنده میزان منابع موجود باشد، قیمت های سایه منعکس کننده ارزش اقتصادی هر واحد از منبع است و نرخ تغییرات مقدار تابع هدف را به ازای افزایش یک واحد منبع نشان می دهد. به نکات زیر در مورد قیمت سایه توجه کنید.

الف) **اگر قیمت سایه منبع بیش تر از قیمت بازار آن شود، خرید آن منبع از نظر اقتصادی به صرفه است.**

ب) هرگاه موجودی منبع از صفر بیش تر باشد، قیمت سایه آن منبع صفر است و به عبارت دیگر منابع کمیاب (منابعی که مقدارشان در تولید به صفر رسیده) دارای قیمت سایه غیرصفر است.

۲) از آنجا که جواب بهینه یک مساله را از جدول بهینه مساله دیگر می توان به دست آورد، با حل یک مساله، جواب هر دو مساله (اولیه و ثانویه) را می توان یافت. لذا هر یک از دومساله ای را که حل آن محاسبات کم تری دارد می توان انتخاب کرد.

به طور کلی مساله ای که محدودیت های کمتری دارد،به عبارت دیگر باید دانست که زمان لازم برای انجام محاسبات در روش سیمپلکس از عوامل مختلفی تاثیر می پذیرد، که تعداد محدودیت ها مهمترین نقش را در این مورد دارد. تجربه نشان داده که زمان محاسبات تقریباً با توان سوم تعداد محدودیت ها بستگی دارد. لذا با دو برابر شدن تعداد محدویت ها این زمان تا $\mathbf{2^3 = 8}$ برابر افزایش می یابد. در مقابل تاثیر تعداد متغیرها تا به این حد نیست، به طوری که دو برابر شدن تعداد متغیرها، احتمالاً زمان محاسبات را حتی دو برابر هم نمی کند. به این ترتیب در انتخاب مساله اولیه یا ثانویه برای حل، آن مساله ای را که تعداد محدودیت کمتری دارد، باید انتخاب کرد.

روش سیمپلکس ثانویه

الگوریتم سیمپلکس ثانویه را پرفسور lemke ابداع کرد. این الگوریتم در موارد خاصی به منظور حذف متغیرهای مصنوعی در برنامه ریزی خطی مورد استفاده قرار می گیرد. در مسائل سیمپلکس ساده در بدست آوردن جواب بهینه، برقراری دو شرط بهینگی و موجه بودن است. شرط موجه بودن یعنی شروع حرکت سیمپلکس از یک نقطه گوشه موجه بوده وضامن بدست آوردن جواب های موجه در تکرارهای مختلف می گردد.

برعکس روش سیمپلکس که سعی بر آن بود تا تمامی اعداد سمت راست، جهت موجه بودن همیشه غیرمنفی باشند و برای شرط بهینگی، که همانا غیرمنفی شدن عناصر سطر صفر بود تا به جواب بهینه می رسیدیم. در سیمپلکس ثانویه ما از حالت بهینگی مساله شروع به حل می نماییم، ولی اعداد سمت راست یا همان شرط موجه بودن برقرار نیست، یعنی مسایل بهینه و غیرموجه توسط روش سیمپلکس ثانویه حل می شود.

گامهای حل سیمپلکس ثانویه عبارتند از :

این روش به منظور حل مسائلی که غیرموجه و بهینه باشند، یعنی بعد از ورود مسئله در جدول سیمپلکس، تمامی اعداد سطر صفر غیر منفی (بهینه بودن) ولی اعداد سمت راست می توانند منفی باشند(غیرموجه بودن)

گام۱- تابع هدف را به صورت Max و محدودیت ها را به شکل ($\leq$) در آورید.

گام۲- مساله را وارد جدول سیمپلکس کنید.

گام۳- منفی ترین عدد در سمت راست ($\overline{b_1}$) را انتخاب کنید، سطر مربوط به این متغیر را «سطر لولا» به نامید و متغیر اساسی مربوط به این سطر را خروجی بگویید. آن گاه به گام ۴ بروید.اگر تمام اعداد سمت راست دارای مقدار غیرمنفی باشند، جواب اساسی فعلی موجه و از انجا که مساله قبلاً بهینه بوده است توقف کنید.

گام۴- متغیر ورودی را با تقسیم اعداد سطر صفر بر اعداد منفی سطر لولا وانتخاب بزرگ ترین عدد (کوچک ترین عدد از نظر قدر مطلق) انتخاب کنید. ستون زیر متغیر ورودی در محدودیت ها را «ستون لولا» به نامید. اگر تمام عناصر سطر لولا غیرمنفی باشند، مساله فاقد منطقه موجه است.

گام۵- عملیات لازم برای یافتن جواب اساسی وجدول بعد سیمپلکس را عیناً مانند روش سیمپلکس انجام داده ، به گام۳ بروید.

***مثال**

مساله زیررا به روش سیمپلکس ثانویه حل کنید.

Min $Z = 4X_1 + 12X_2 + 18X_3$

$X_1 + 3X_3 \geq 3$

$2X_2 + 5$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

تابع هدف را ضرب در (۱-) به Max و محدودیت ها را به صورت کوچک تر یا مساوی در می آوریم:

Max $-Z = -4X_1 - 12X_2 - 18X_3$

$-X_1 - 3X_3 \leq -3$

$-2X_2 - 2X_3 \leq -5$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

استاندارد سازی مدل :

$$\text{Max } Z \;\; 4X_1 + 12X_2 + 18X_3 = 0$$

$$-X_1 - 3X_3 + S_1 = -3$$

$$-2X_1 - 2X_3 + S_2 = -5$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$$

بعد از افزودن متغیرهای کمکی به محدودیت ها مساله را وارد جدول کنید.

متغیر اساسی	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	اعداد سمت راست	
Z	−۱	۴	بهینه ۱۲	۱۸	۰	۰	۰	
S_1	۰	−۱	۰	−۳	۱	۰	−۳	غیر موجه
S_2	۰	۰	−۲	−۲	۰	۱	−۵	

جدول ۶-۸ جدول ابتدائی مساله

همان طور که می بینید تمام اعداد سطر صفر غیرمنفی، اما اعداد سمت راست در محدودیت ها منفی هستند، پس مساله بهینه و غیرموجه است. منفی ترین عدد سمت راست (۵-) است، در نتیجه سطردوم سطر لولا و S_2 متغیر خروجی است. اعداد سطر صفر را براعداد منفی سطر لولا تقسیم می کنیم ،قدر مطلق این تقسیم عبارت است از:$\left|\frac{18}{-2}\right|$ و $\left|\frac{12}{-2}\right|$ که کوچک ترین مقدار حاصل ۶شده ومربوط به ستون X_2 است لذا این متغیر وارد خواهد شد. جدول زیر تکرار بعد را نشان می دهد.

متغیر اساسی	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	اعداد سمت راست
Z	۱−	۴	۰	۶	۰	۶	۳۰−
S_1	۰	۱−	۰	۳−	۱	۰	۳−
X_2	۰	۰	۱	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

جدول ۷-۸ جدول مساله

چون هنوز عدد۳- در سمت راست وجود دارد جدول نهایی نیست و $\mathbf{S_1}$ خروجی و $\mathbf{x_3}$ ورودی است.

متغیر اساسی	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	اعداد سمت راست
Z	۱−	۲	۰	۰	۲	۶	۳۶−
X_3	۰	$\frac{1}{3}$	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	۰	۱
X_1	۰	$-\frac{1}{3}$	۱	۰	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

جدول ۸-۸ جدول مساله

چون تمام اعداد سمت راست در محدودیت ها غیرمنفی شده اند، جدول نهایی و جواب بهینه عبارت است از :

$$x_1^* = 0, \qquad x_2^* = \frac{3}{2}, \qquad x_3^* = 1\,, \qquad Z^* = 36$$

توجه کنید اگر ثانویه مساله فوق را بنویسید و آن را به روش سیمپلکس حل کنید، دقیقاً همین عملیات با همین تعداد تکرار انجام می شود. درواقع روش سیمپلکس ثانویه مطابق با حل مساله ثانویه عمل می کند.

نکات مهم :

1. **مساله برنامه ریزی خطی که ابتدا در اختیار شما قرار می گیرد، مساله اولیه است و با توجه به آن ، مساله ثانویه براساس روابط زیر نوشته می شود.**
2. **اگر تابع هدف مساله اولیه به صورت Max باشد باید ابتدا تمام محدودیت های نامعادله ای آن بصورت $\leq$ در آید.**
3. **اگر تابع هدف مساله اولیه بصورت Min باشد باید ابتدا تمام محدودیت های نامعادله ای آن بصورت $\geq$ در آید.**
4. **هرگاه جواب اساسی، موجه باشد مکمل آن غیرموجه است. مگر جواب اساسی بهینه و مکمل آن که هر دو موجه هستند.**

۵. مقدار تابع هدف مساله اولیه وثانویه به ازای جواب اساسی و مکمل آن، با هم برابرند. یعنی؛ Z=Y است.

جدول ۹-۸ قواعد نوشتن مسئله ثانویه

مساله Max	مساله Min
تعداد محدودیت ها	تعداد متغیرها
محدودیت $(\leq)$	متغیر غیر منفی
محدودیت $(\geq)$	متغیر غیر مثبت
محدودیت $(=)$	متغیر آزاد در علامت
تعداد متغیرها	تعداد محدودیت ها
متغیر غیر منفی	محدودیت $(\geq)$
متغیر غیر مثبت	محدودیت $(\leq)$
متغیر آزاد در علامت	محدودیت $(=)$

ضریب تابع هدف برای متغیرjام عدد سمت راست برای محدودیت jام

عدد سمت راست برای محدودیت iام	**ضریب تابع هدف برای متغیرiام**
ضریب فنی در محدودیتi	**ضریب فنی در محدودیتj**

برای متغیر j(a_{ij}) برای متغیرi(a_{ji})

مساله ۱

برنامه ریزی خطی زیر را به روش سیمپلکس ثانویه حل کنید؟

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2$$
$$\text{S.T:} 2X_1 + 3X_2 \geq 30$$
$$-X_1 + 2X_2 \geq 10$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

مساله ۲

برنامه ریزی خطی زیر را به روش سیمپلکس ثانویه حل کنید؟

$$\text{Min } Z = 80X_1 + 100X_2$$
S.T:
$$80X_1 + 60X_2 \geq 1500$$
$$20X_1 + 90X_2 \geq 1200$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

مساله ۳

برنامه ریزی خطی زیر را به روش سیمپلکس ثانویه حل کنید؟

Max $Z = -X_1 + 2X_2$

S.T:

$X_1 + X_2 \geq 0$

$-X_1 + X_2 \geq 1$

$X_2 \geq 3$

$X_1 , X_2 \geq 0$

حالت های خاص در جداول سیمپلکس:

بهینه چندگانه :

الف) اعداد سمت راست در محدودیت ها هیچ وقت منفی نمی شوند.

ب) در جداول سیمپلکس هیچ گاه مقدار z بدتر نمی شود یا ثابت می ماند یا بهتر می شود.

ج) متغیرهای اساسی در تمامی جداول باید در سطر خود (عددی که زیر ستون متغیر x_i و مقابل سطر x_i تراز دارد)ضریب یک ودر بقیه سطرها ضریب صفر داشته باشد. در جداول ابتدایی روش M بزرگ و جداول اول مرحله اول و دوم روش دومرحله ای باید عملیات یکه کردن صورت پذیرد.

د) هرگاه با محدودیتی به صورت بزرگتر و مساوی مواجه شدید از سمت چپ آن یک متغیر کمکی S کم و یک متغیر مصنوعی R اضافه نمایید تا نامعادله به معادله تبدیل شود. در این وضعیت متغیر مصنوعی اضافه شده در جدول سیمپلکس، متغیر اساسی این محدودیت را تشکیل می دهد.

و) هرگاه با محدودیت تساوی مواجه شدید فقط یک متغیر مصنوعی R به سمت چپ نامعادله اضافه کرده در این حالت متغیر مصنوعی اضافه شده در جدول سیمپلکس متغیر اساسی این محدودیت را تشکیل می دهد.

ه) در محدودیت های کوچکتر و مساوی، نیازی به استفاده از متغیر مصنوعی R نمی باشد و فقط یک متغیر کمکی S به سمت چپ نامعادله اضافه و آنرا به تساوی تبدیل کنید در این وضعیت متغیر کمکی اضافه شده متغیراساسی این محدودیت در جدول سیمپلکس می باشد.

ن) به ازای تعداد محدودیت ها متغیر اساسی شروع مسئله داریم.

مسئله سیمپلکس:

جواب چند گانه :

$$\max(z) = 10x_1 + 20x_2$$
S.t:
$$2x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$2x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

تابلوی نهائی:

Xb	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs / B
Z	0	0	5	0	60
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	3
s_2	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	0

هرگاه ضریب یک متغیر غیر اساسی در سطر $\mathbf{Z}$ جدول نهایی صفر باشد نشانه چندگانه بودن جواب بهینه است(چون $\mathbf{x_1 = 0}$ است و در سطر $\mathbf{Z}$، $\mathbf{x_1}$ صفر است پس در جدول سیمپلکس بالا دارای جواب چند گانه هستیم).

جواب تبهگن:

وجود عدد صفر در سمت راست به جزء سطر تابع هدف نشان دهنده جواب تبهگن است.

تابلوی نهایی:

Xb	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs / B
Z	0	0	5	0	60
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	3
s_2	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	2

هرگاه جواب یک متغیر اساسی صفر باشد، دارای حالت خاص تبهگن هستیم. اگر تابلو نهایی باشد تبهگن ها، تبهگن دائم است و در تابلوهای ناقص تبهگن ها، تبگهن موقتی است.

فاقد منطقه موجه:

هرگاه در جدول سیمپلکس، یک یا چند متغیر مصنوعی با مقدار غیر صفر در جدول بهینه مسئله وجود داشته باشد، مسئله دارای حالت خاص، فاقد منطقه موجه است.

$$\max(z) = 4x_1 + 3x_2$$
S.t:
$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$2x_1 - x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

تابلوی نهائی:

xb	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R_3	rhs / B
Z	0	0	$\frac{m+10}{3}$	$\frac{m+1}{3}$	0	0	-2m-11
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	1
x_2	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	2
R_3	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	1	2

منطقه موجه نامحدود
- جواب بهینه محدود
- جواب بهینه نا محدود

جواب بهینه نامحدود:

$$\max(z) = 6x_1 - 2x_2$$
S.t : $2x_1 - x_2 \le 2$
$$x_1 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

تابلوی نهایی:

تابلوی مقدماتی

Xb	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs / B
Z	-6	+2	0	0	0
s_1	2	-1	1	0	2
s_2	1	0	0	1	4
Z	0	0	2	2	12
x_1	1	0	0	1	4
x_2	0	1	-1	2	6

تابلوی نهایی

وجود ستون منفی یا صفر برای یک متغیر غیراساسی در تابلوی مقدماتی نشانه نامحدود بودن ناحیهٔ موجه است. هرگاه در جدول سیمپلکس عدد منفی در سطر **Z** وجود داشته باشد ولی امکان متغیر خروجی به دلیل منفی یا صفر بودن ستون اول وجود نداشته باشد مسئله دارای حالت خاص منطقه موجه نامحدود، جواب بهینه نامحدود است. و هرگاه در جدول سیمپلکس عدد منفی در سطر **Z** نداشتیم ولی اعداد صفر و منفی در ستون ها باشد(ستون منفی) مسئله دارای حالت خاص منطقه موجه نامحدود، جواب بهینه محدود است.

فصل نهم

برنامه ریزی خطی

(تحلیل حساسیت Scsitivity Analysis)

برنامه ریزی خطی (تحلیل حساسیت Scsitivity Analysis)

اهداف فصل

هدف این فصل ، آشنا ساختن دانشجویان با بررسی تغییرات ایجاد شده در مدل برنامه ریزی خطی است. بررسی تغییرات ایجاد شده ، پس از حل مدل و رسیدن به جواب بهینه را تحلیل پس بهینگی Post – Optimality Analysis گویند. که شامل تحلیل مجزا و منفرد تغییرات در مدل است که به تحلیل حساسیت معروف است و همچنین تحلیل همزمان و پیوسته تغییرات در مدل برنامه ریزی خطی است. که به برنامه ریزی پارمتریک معروف است.

مقدمه

تحلیل حساسیت یکی از مباحث مهم و جالب برنامه ریزی خطی است که همواره از بدو پیدایش و ابداع برنامه ریزی خطی تاکنون مورد توجه متخصصین تحقیق در عملیات واقع شده است. شاید یکی از دلایل آن نقش اساسی این مبحث در درک و استنباط منطق برنامه ریزی خطی باشد، همچنین با استفاده از مفاهیم تحلیل حساسیت و برنامه ریزی ثانویه می توان مفاهیم پیچیده تر برنامه ریزی خطی را به سهولت تعبیر و تفسیر نمود. به منظور بیان ساده تر مفاهیم تحلیل حساسیت در این فصل ابتدا فرض می شود که مدل برنامه ریزی خطی فقط دارای دو متغیر تصیمم $\mathbf{x_1}$ و $\mathbf{x_2}$ می باشد بنابراین حل ان با استفاده از روش ترسیمی امکان پذیر خواهد بود، لذا ابتدا بخشی از مفاهیم تحلیل حساسیت به طریقه هندسی یا ترسیمی مطرح شده، سپس مفاهیم به مدلهای چند متغیره تعمیم داده خواهند شد.

منظور از تحلیل حساسیت بررسی تاثیر تغییرات محتمل پارامترها بر روی جواب بهینه است. از این نقطه نظر ،پارامتر ها به دو دسته کلی تقسیم می شوند.برخی پارامترها می توانند مقادیر منطقی مختلفی را اختیار کنند و در عین حال تاثیری بر روی بهینگی جواب نداشته باشد. اما در مقابل ، اندک تغییری در بعضی از پارامترهای دیگر ممکن است اوصولاً به جواب بهینه جدیدی منجر شود. اهمیت این موضوع وقتی بیشتر می شود که در اثر این تغییرات مقدار تابع هدف بهینه قبلی کاملا نامناسب و حتی در مواردی غیر موجه گردد.

بنابراین هدف اصلی تحلیل حساسیت ، شناختن این نوع پارامترهای کاملاً حساس است تا تخمین آنها با دقت بیشتری انجام شود و در عین حال جوابی انتخاب گردد که در مجموع به ازاء تمام مقادیر محتمل پارامترها، به عنوان یک جواب خوب مطرح باشد. با این توصیف ، « بررسی تغییرات در جواب بهینه بر اثر تغییرات در داده های مختلف یک مساله را تحلیل حساسیت یا تحلیل پس بهینگی Postoptmality Analysis می نامند» .

در تحلیل حساسیت ، مهمترین تغییراتی که تاثیرشان بر جواب بهینه مورد بررسی قرار می گیرند، عبارتند از :

۱) **تغییر در ضرایب تابع هدف مدل (C_j)**

۲) **تغییر در میزان منابع موجود یا مقادیر سمت راست محدودیت ها (b_i)**

۳) **تغییر در ضرایب فنی متغیرها یا ضرایب متغیر ها در محدودیت ها (a_{ij})**

۴) **اضافه شدن یک (چند) متغیر تصمیم جدید.**

۵) **اضافه شدن یک (چند) محدودیت جدید.**

برای درک بهتر تغییرات پنج گانه فوق و اهمیت بحث تحلیل حساسیت مدل برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 50X_2$$

S.T:

$$X_1 + 2X_2 \le 40 \qquad \text{محدودیت نیروی کار(نفر – ساعت)}$$

$$4X_1 + 3X_2 \le 120 \qquad \text{محدودیت مواد اولیه (چوب)}$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

در مدل فوق X_1 بیانگر میزان تولید صندلی و X_2 بیانگر میزان تولید است. هر عدد صندلی تولیدی دارای سود ۴۰ ریالی و هر عدد میز دارای سودی ۵۰ ریالی است، برای تولید هر عدد صندلی به یک نفر – ساعت نیروی کار و ۴ کیلو گرم چوب نیاز است. برای تولید هر عدد میز به ۲ نفر – ساعت نیروی کار و ۳ کیلو چوب نیاز داریم . کل نیروی کار موجود ۴۰ نفر ساعت و کل مواد اولیه (چوب) موجود ۱۲۰ کیلو گرم است.

مدل فوق با استفاده از روش ترسیمی حل شده است که جواب بهینه آن به شرح زیر است:

$$\begin{cases} X_1 = ۲۴ \\ X_2 = ۸ \\ Z^* = ۱۳۶۰ \end{cases}$$

حال فرض کنید به دلیل نوسانات بازار و شرایط اقتصادی تغییرات زیر در اجزای مدل ایجاد شده است:

1. **سود هر عدد صندلی تولیدی در بازار از ۴۰ ریال به ۳۰ ریال کاهش یافته است. این تغییر چه تاثیری بر جواب بهینه فوق دارد؟**
2. **میزان چوب در دسترس از ۱۲۰ به ۱۰۰ کیلو گرم کاهش یافته است. این کاهش چه تاثیری بر جواب بهینه فوق خواهد داشت؟**
3. **میزان مصرف هر عدد میز از محدودیت نیروی کار از ۲ به ۳ نفر – ساعت افزایش یافته است. تاثیر این تغییر بر جواب بهینه فوق چه خواهد بود؟**
4. **مدیریت کارخانه تصمیم گرفته است که در کنار میزوصندلی،محصول جدیدی (X_3) تولید کند که هرعدد آن سودی معادل ۴۵ ریال داردو میزان مصرف آن از نیروی کار و چوب به ترتیب ۱ نفر- ساعت و ۲ کیلو گرم است.**

یعنی مدل فوق به صورت زیر تغییر کرده است:

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 50X_2 + 45X_3$$

S.T:

$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 40$ **محدودیت نیروی کار(نفر – ساعت)**

$4X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 120$ **محدودیت مواد اولیه (چوب)**

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

اثر این تصمیم بر جواب بهینه مدل اولیه چیست؟

مدیریت کارخانه ، تاکنون از محدودیت آلومینیوم مورد استفاده در میز و صندلی غفلت کرده است. بنابراین جدیداً متوجه شده است که باید محدودیت زیر را به مدل فوق اضافه کند:

$\frac{1}{2}X_1 + \frac{3}{2}X_2 \leq 20$ **محدودیت آلومینیوم (کیلوگرم)**

بنابراین مدل اولیه به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 50X_2$$

S.T:

$X_1 + 2X_2 \leq 40$ **محدودیت نیروی کار(نفر – ساعت)**

$4X_1 + 3X_2 \leq 120$ **محدودیت مواد اولیه (چوب)**

$\frac{1}{2}X_1 + \frac{3}{2}X_2 \leq 20$

$X_1 , X_2 \geq 0$

یعنی اینکه مدل به جای دو محدودیت دارای ۳ محدودیت است. فکر می کنید تاثیر این افزایش محدودیت بر جواب بهینه مدل اولیه چیست؟

اولین راه حلی که برای بررسی تغییرات ایجاد شده به ذهن می رسد، آن است که مجدداً مدل را با اعمال تغییرات بازنویسی کرده (همانند موردهای ۴و۵) و به حل آن پرداخت.بالاخره یا جواب بهینه قبلی بدون تغییر می ماند و یا تغییر خواهد کرد! در ادبیات تحقیق در عملیات این راه حل بسیار ابتدایی و غیر اقتصادی جلوه می کند. فن تحلیل حساسیت ، فن بسیار کارآمدی است که قادر است با مبنا قرار دادن جواب بهینه مدل اولیه ،اثر تغییر (تغییرات) ایجاد شده را با سرعت بیشتری بررسی کند.در واقع به کمک فن تحلیل حساسیت می توان،بدون حل مجدد مساله ،به بررسی تاثیر یا عدم تاثیر هریک از تغییرات پنجگانه فوق بر جواب بهینه مدل اصلی پرداخت!

فصل دهم

کنترل موجودی انبار

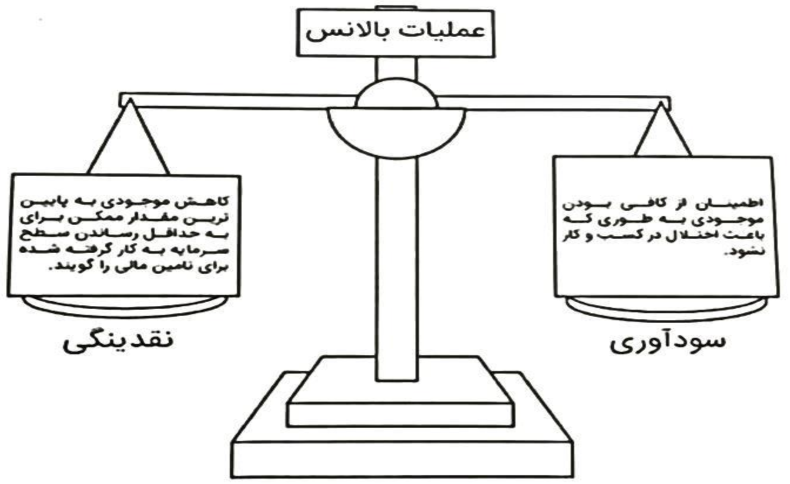
مباحث کنترل موجودی انبار

مقدمه

کنترل موجودی عبارت است از جریانی که با توجه به ضمانت اقلام موجود در انبار یک سازمان و تاثیر عواملی همچون زمان، مکان، تعداد، کیفیت و هزینه برای بخش هایی مانند بخش های عملیاتی تولید، توزیع، فروش و مهندسی در دسترس افراد قرار بگیرد. عوامل مختلفی در کنترل موجودی اهمیت دارند اما از مهمترین آنها می توان به میزان سفارش و زمان سفارش اشاره کرد. کنترل موجودی دارای اهداف مشخصی است که عبارت است از ارزیابی و نگهداری سطحی از موجودی هایی که هزینه های سیستم، سازمان و یا کارخانه صنعتی را کمینه می کند.

عملیات بالانس ، تراز موجودی(Inventory Balancing Act)

عملیات بالانس از جمله عملیاتی است که سبب می شود میزان سطح سرمایه به کار رفته شده برای موجودی با قابلیت تبدیل به سرمایه به طوری که تضمین کننده کلیه عملیات های تولیدی، فنی و فروش به صورتی که در موعد مقرر و در دسترس کامل باشد به حداقل برسند.



عواملی همچون انباشت بالای موجودی باعث افزایش هزینه سازمان و یا کارخانه صنعتی می شود و منجر به پنهان ماندن مشکلات و نگهداری موجودی در سطح بهینه می گردد که همین امر موجب بروز مشکلاتی از قبیل مشکلات مدیریتی قابل اصلاح در سازمان و تولید می شود. به عنوان نمونه اگر فرض بگیریم که

موجودی یک کالا در انبار (نرم افزار انبارداری) زیاد باشد، در صورتی که در خط تولید اتلاف وجود داشته باشد؛ این اتلاف با توجه به موجودی بالای انبار (نرم افزار انبارداری) قابل مشاهده نیست لذا راه حلی برای آن در نظرگرفته نمی شود. همچنین یکی از اهداف سازمان ها در قبال موجودی، کاهش آن است.

درستی و صحت موجودی انبارها (Record Accuacy)

مدیریت انبار(نرم افزار انبارداری) به اطلاعات زیادی نیاز دارد بنابراین اطلاع دقیق از موجودی انبارها باعث می شود تا این اطلاعات دقیق از موجودی انبارها به نوعی پایه اصلی سیستم های برنامه ریزی تولید و کنترل موجودی محسوب شود. صحت و موجودی انبارها به عوامل زیر بستگی دارد:

- ✓ **ثبت منظم و سیستماتیک ورود و خروج کالا به انبارها**
- ✓ **استقرار منظم قفسه ها در انبارها**
- ✓ **شماره گذاری قفسه ها در انبارها**
- ✓ **کالاها و چیدمان منظم قطعات در قفسه ها**
- ✓ **استفاده مطلوب از فضای انبارها**

– روش های اجرای کنترل موجودی

یکی از روش های استراتژیک در سازمان ها برای مدیریت فرآیند کنترل موجودی کالاها در انبار (نرم افزار انبارداری) این است که اقلام وارده به انبار از حداکثر سقف موجودی تعیین شده فراتر نرود و یا از حداکثر ظرفیت فضای مجاز اختصاص یافته برای انبار بیشتر نشود. کنترل موجودی در انبار (نرم افزار انبارداری) می تواند به روش های مختلفی انجام بگیرد که موارد زیراز جمله آنها می باشد:

۱) **کنترل دستی و از طریق کارتکس و موجودی فیزیکی بصورت روزانه یا ادواری.**

۲) **کنترل سیستمی واز طریق اخذ گزارشات موجودی بصورت روزانه یا ادواری از نرم افزار مکانیزه انبار و مقایسه با پارامترهای کنترل موجودی توسط انباردار.**

۳) **کنترل سیستمی و بصورت کاملاً اتوماتیک توسط سیستم انبار با تعریف پارامترهای کنترل موجودی در سیستم نرم افزاری انبار.**

۴) **استفاده از روش مدیریت موجودی توسط فروشنده .**

۵) **تفکیک موجودی به دسته های کالای انبار و کنترل آن.**

۶) **ارزیابی میزان موجودی در انبار بر مبنای مشاهدات دیداری انباردار، این روش بر مبنای مدیریت دیداری صورت می گیرد و کاربرد آن در انبارهایی که تعداد اقلام زیادی را در خود جای داده اند، کار پر ریسک و پر زحمتی محسوب می گردد.**

مدل های کنترل موجودی

استفاده از مدل ها و فرمول های کنترل موجودی دارای هدف هایی است که زمان و مقدار بهینه سفارش با استفاده از مدل های ریاضی تعیین گردد. اقلام و محصولات با تقاضای مستقل(Independent Demand) از سایر اقلام و محصولات از نمونه مدل های کنترل موجودی مربوط به بحث است و براساس اطلاعات اولیه همچون هزینه های سفارش و نگهداری کالا، تقاضای سالانه و روزانه کالا، مدت زمان تحویل اقلام سفارش گذاری شده و ... عملیات پایش بر روی آنها انجام می گیرد.

انواع هزینه ها در مدیریت موجودی کالا در انبار:

هزینه های سفارش کالا(Ordering Cost**)**

سفارش کالا به معنای خرید و یا تامین کالاهای مورد نیاز سازمان است و هزینه های سفارش عبارت است از :

- ✓ **هزینه های دفتری، اداری**
- ✓ **حمل سفارش**
- ✓ **گزارش اطلاعات**
- ✓ **تحویل محصول سفارش شده**
- ✓ **حقوق پرسنل**

نکته: اگر کالایی در داخل کارخانه تولید شود، در این صورت هزینه سفارش آن به صورت هزینه آماده سازی خط تولید آن کالا برای تولید کالای مورد نظر است. سازمان ها با توجه به سیاست های مختص خود اقدام به برآورد هزینه های سفارش کالا می کنند اما اگر هزینه های برآورد شده هر سفارش در دست نباشد میتوان این هزینه ها را به صورت زیربدست آورد:

الف) ابتدا هزینه سفارش یک واحد ریالی از کالاها، را طی یک سال ،بر حسب نسبت یا درصدی از قیمت واحد کالا بدست می آوریم.

$$\text{هزینه سفارش طی یک سال} = \frac{\text{کل هزینه سفارش}\left(\text{تدارکات}\right)\text{طی یک سال}}{\text{کل خرید طی یک سال}}$$

هزینه سفارش برای یک کالا (مقدار x) را طبق تناسب زیر محاسبه می نمائیم.

$$\frac{\text{هزینه سفارش طی یک سال}}{\mathbf{x}\left(\text{هزینه سفارش برای کالای مورد نظر}\right)} = \frac{\mathbf{1}}{\text{قیمت واحد کالای مورد نظر}}$$

یا به عبارتی دیگر:

هزینه سفارش یک واحد ریالی طی یک سال (حاصل عبارت اول)× قیمت کالای مورد نظر= هزینه سفارش کالای مورد نظر سپس هزینه هر بار سفارش برابر است با:

حاصلضرب مقدار X در Q(Q = مقدار هر بار سفارش)

انواع هزینه ها در مدیریت موجودی

هزینه های سفارش (Cost of Order)

- ✓ به کلیه هزینه هایی که از زمان درخواست کالا تا دریافت آن ایجاد می شود هزینه سفارش گوییم.
- ✓ هرچه میزان سفارش بیشتر شود هزینه کل سفارش کمتر خواهد بود .
- ✓ هزینه فرم درخواست خرید، ارسال فرم به فروشنده، هزینه حمل کالا، عوارض گمرکی و...
- ✓ این هزینه ها به صورت ثابت و متغیر است.

هزینه نگهداری (Holding cost)

هزینه نگهداری شامل هزینه تامین فضا برای انبار (نرم افزار انبارداری)، نیروی انسانی، بیمه، تجهیزات حمل و نقل، بهره بانکی، فساد و خرابی اقلام انبار شده است. هر سازمان جهت برآورد هزینه نگهداری یک کالا می تواند سیاست های مختص به خود را داشته باشد، ولی اگر هزینه نگهداری یک کالا در دست نباشد می توان به صورت زیر انجام داد: ابتدا هزینه نگهداری یک واحد ریالی از کالاها طی یک سال را بر حسب نسبت یا درصدی (٪) از قیمت واحد کالا بدست می آوریم:

$$\text{هزینه نگهداری طی یک سال} = \frac{\text{کل هزینه انبار طی یک سال}}{\text{کل موجودی انبار}\left(\text{ریالی}\right)\text{طی یک سال}}$$

سپس هزینه نگهداری یک کالا (مقدارX) را طبق تناسب زیر محاسبه می نمائیم:

$$\frac{\mathbf{1}}{\text{قیمت واحد کالای مورد نظر}} = \frac{\text{هزینه نگهداری طی یک سال}}{\mathbf{x}\left(\text{هزینه نگهداری برای کالای مورد نظر}\right)}$$

هزینه کل انبارداری برای یک قلم کالا به صورت زیر می باشد:

هزینه کل انبارداری (TC یک قلم کالا)= هزینه سفارش+ هزینه کل نگهداری هزینه کل انبارداری

$$\left(\text{هزینه کل انبارداری}\right) \mathbf{TC} = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{Q}}\mathbf{S} + \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{2}}\mathbf{H}$$

و با در نظر گرفتن ارزش کل خرید موجودی داریم:

$$\left(\text{هزینه کل موجودی}\right) = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{Q}}\mathbf{S} + \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{2}}\mathbf{H} + \mathbf{CD}$$

CD : ارزش کل خرید سالانه= قیمت واحد کالا (C)× نرخ تقاضا (D)

$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{Q}}\mathbf{S}$: هزینه کل سالیانه سفارش برای یک قلم کالا

$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{Q}}$: تعداد دفعاتی که برای یک جنس در سال سفارش داده می شود.

$\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{2}}\mathbf{H}$: هزینه سالیانه کل برای نگهداری برای یک قلم کالا

$\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{2}}$: متوسط مقدار موجودی که در یک سال نگهداری می شود.

D = تقاضای سالیانه از یک کالا

S = هزینه هر بار سفارش

H : هزینه سالانه نگهداری یک واحد از کالا

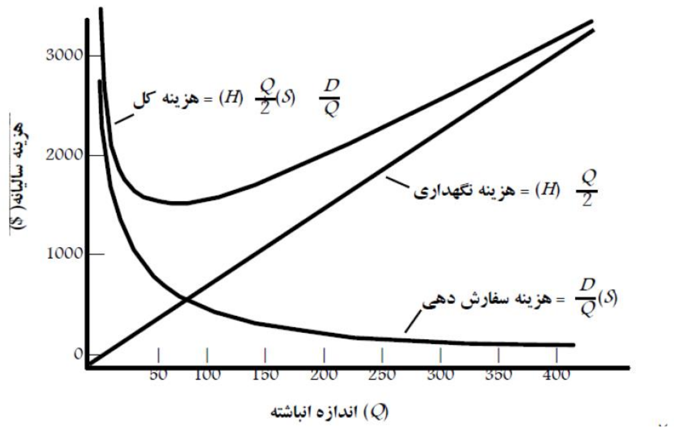
D : مقدار تقاضای مصرف روزانه از یک کالا

Q : مقدار سفارش در هر نوبت سفارش

هزینه اندازه اقتصادی سفارش

به نمودار توجه کنید:

هزینه اندازه اقتصادی سفارش



سفارش یا موجودی در راه

پس از انجام مراحل عملیات سفارش گذاری براساس روش های بهینه، برای دسترسی به سفارش یا موجودی در راه که شامل مقداری از یک کالای سفارش شده اما دریافت نشده (در برخی موارد می توان از آن به عنوان موجودی یاد کرد) باید از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$\mathbf{D_L = d \times I}$$

D : تقاضای روزانه

I : زمان انتظار تا رسیدن محموله سفارش داده شده،(LT) تدارکات.

ذخیره اطمینان(احتیاطی) یا حداقل موجودی(Safty stock)

ذخیره اطمینان به مفهوم میزان اضافه موجودی انبار(نرم افزار انبارداری) برای جلوگیری از کمبودهای احتمالی در زمان انتظار جهت دریافت کالا می باشد و همچنین موجودی را در مقابل افزایش غیر منتظره تقاضا یا مدت تقاضا بیمه می کند.

نکته :

در اغلب موارد ذخیره احتیاطی ۱۰ ٪ مصرف کل سالانه است لذا زمانی که موجودی کالایی به این سطح برسد باید این امر گزارش شود و با بررسی سوابق و در صورت نیاز سیستم بازنگری موجودی اصلاح شود.

فصل یازدهم

تخصیص (واگذاری کار)

تخصیص (واگذاری کار):

مقدمه

« مدل تخصیص کار» « Assignment model» از سری تصمیم‌های تحت شرایط اطمینان کامل بوده که عوامل نامطمئن در آن نقش ندارند. این مدل از ساده‌ترین مسائل توزیع و تعیین سهمیه می‌باشد، در این مدل K فعالیت و K وسیله مفروض است، که هر فعالیتی می‌تواند به تصادف توسط هر وسیله انجام شود. بنابراین مسئله شامل چگونگی واگذاری هر فعالیت به یک وسیله است، اما از آنجایی که کارآیی و بهره‌وری وسایل در انجام هر یک از فعالیت‌ها متفاوت می‌باشد، می‌بایست واگذاری به نحوی انجام گیرد که مناسب-ترین نتیجه با سود عاید گردد. به عنوان نمونه می‌توان مثال‌هایی در مورد واگذاری همزمان کارهای فنی مشابه به دستگاه‌های خودکار، واگذاری مشاغل به کارمندان و بعضی از مسائل مدیریت حمل و نقل را بیان نمود.

مدل حمل و نقلی که همواره تعداد عرضه و تقاضا در آن یک واحد باشد به مدل تخصیص معروف است این مدل دارای کاربردهای زیادی می باشد که از آن جمله می توان تخصیص n فرد به n شغل یا n اپراتور به n دستگاه و ... اشاره کرد کلیه مسائل تخصیص دارای ویژگی های اساسی زیر هستند:

۱. موضوعات مورد توجه در مدل تخصیص مانند مشاغل، کارکنان و پروژه ها دارای تعداد محدودی هستند.
۲. تخصیص ها حالت یک به یک دارند به عنوان مثال هر فرد فقط به یک شغل تخصیص می یابد .
۳. هدف از مدل تخصیص یافتن مناسبترین تخصیص است بطوریکه در آن کل هزینه حداقل و کل سود حداکثر گردد.

روش های حل مدل تخصیص:

۱) روش شمارش کامل

۲) روش مجارستانی

۳) روش شمارش کامل در کتاب پژوهش عملیاتی (۱) توضیح داده شد.

۱. روش مجارستانی:

این روش، روشی است سریع و کارآمد در حل مسائل تخصیص است و بر این قاعده استوار است که اگر مقدار ثابتی از همه عناصر در هر سطر و ستون ماتریس تخصیص کم کرده یا اضافه کنیم هزینه کل به همان اندازه تغییر می کند ولی در تعیین جواب بهینه تخصیص هیچ تغییری ایجاد نمی شود، مراحل روش تخصیص مجارستانی به شرح زیرمی باشد:

۱) تشکیل ماتریس هزینه فرصت به شکل زیر:

الف)کوچکترین عدد هر سطر (حتی صفر) عدد هر سطر را از تمام اعداد آن سطر کم کنید و ماتریس جدید را بنویسید.

ب)کوچکترین عدد هر سطر (حتی صفر) عدد هر ستون را از تمام اعداد آن ستون کم کنید و ماتریس جدید را بنویسید.

۲) آزمون بهینگی:

برای انجام آزمون بهینگی لازم است صفرهای ایجاد شده درماتریس هزینه فرصت را با استفاده از حداقل خطوط افقی و عمودی بپوشانید، این خطوط را خطوط پوششی می نامند که فقط می تواند بصورت افقی و عمودی باشند. چنانچه حداقل خطوط پوششی با بعد ماتریس یعنی n برابر باشد. مسئله حل شده است و می توان جواب بهینه را بصورت زیر استخراج کنید. صفری را که هر سطر وجود دارد انتخاب کنید و آنرا بعنوان یک تخصیص سطر به ستون مربوطه در نظر بگیرید سپس سطر و ستون تخصیص داده شده را از ماتریس هزینه فرصت حذف کنید و این عمل را در مورد سایر سطرها انجام دهید . اما چنانچه حداقل خطوط پوششی کمتر از بعد ماتریس هزینه باشدجواب بهینه هنوز حاصل نشده است و باید ماتریس هزینه فرصت را بهبود داد.

۳) بهبود ماتریس هزینه فرصت:

در این مرحله باید کوچکترین عنصر ماتریس هزینه فرصت که توسط هیچ یک از خطوط پوششی، پوشیده نشده اند را انتخاب کنید و این اعداد را از کلیه اعداد بدون پوشش کم کرده و به اعداد محل تقاطع خطوط پوشش اضافه کنید. سایر اعداد بدون تغییر باقی می ماند در نهایت دوباره به مرحله دوم باز گردید.

شغل / فرد	G_1	G_2	G_3
P_1	۱۵	۱۰	۲۶
P_2	۱۲	۱۱	۲۸
P_3	۱۳	۱۴	۲۲

مرحله اول (کسر سطری)

شغل / فرد	G_1	G_2	G_3
P_1	۵	۰	۱۶
P_2	۱	۰	۱۷
P_3	۰	۱	۹

مرحله دوم (کسر ستونی)

شغل / فرد	G_1	G_2	G_3
P_1	۵	۰	۶
P_2	۱	۰	۷
P_3	۰	۱	۰

چون تعداد خطوط پوششی(۲) و بعد ماتریس n=3 می باشد و با هم برابر نیستند پس ادامه می دهیم.

شغل / فرد	G_1	G_2	G_3
P_1	۴	۰	۵
P_2	۰	۰	۶
P_3	۰	۲	۰

n=3 و خطوط پوششی =۳ پس مسئله حل شده است.

فرد	شغل	هزینه
P_1	G_2	۱۰
P_2	G_1	۱۲
P_3	G_3	۲۲
جمع		۴۴

مساله :

فرض کنیم چهارساختمان d,c,b,a باید ساخته شوند. چهار پیمانکار ۴، ۳، ۲، ۱ نیز حاضر به ساخت بوده که هر کدام به ترتیب هزینه های زیر را در ساخت هر یک از ساختمان ها پیشنهاد کرده اند:

پیمانکار / ساختمان	۱	۲	۳	۴
A	۴۸	۴۸	۵۰	۴۴
B	۵۶	۶۰	۶۰	۶۸
C	۹۶	۹۴	۹۰	۸۵
D	۴۲	۴۴	۵۴	۴۶

مسئله عبارت از واگذار کردن ساخت یکی از ساختمان ها به هر یک از پیمانکاران است، بطوری که مجموع هزینه ساخت چهار ساختمان کمترین مقدار ممکن گردد.

قدم اول: کسر کوچک ترین عدد هر ردیف

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 12 \\ 11 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

قدم دوم: کسر کوچکترین عدد هرستون

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 12 \\ 11 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

قدم سوم: پوشاندن صفرها توسط خطوط افقی و عمودی

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 12 \\ 11 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که تعداد خطوط افقی و عمودی کمتر از بعد ماتریس یعنی ۴ است، بنابراین بسط ادامه خواهدداشت.

جهت اجرای قدم چهارم: عدد ۱ را از اعداد ردیف اول وسوم کم و با اعداد واقع در محل برخورد خطوط افقی و عمودی جمع نموده، درنتیجه خواهیم داشت:

۳	۱	۱	۰	قدم سوم	۳	۱	۱	۰	ماتریس پایانی
۰	۲	۰	۱۳	←	۰	۲	۰	۱۳	←
۱۰	۶	۰	۰		۱۰	۶	۰	۰	
۰	۰	۸	۵		۰	۰	۸	۵	

قدم پنجم: تخصیص کار را بصورت زیر انجام می دهیم:

	۱	۲		۴
a	۳	۱	۱	۰
b	۰	۲	۰	۱۳
c	۱۰	۶	۰	۰
d	۰	۰	۸	۵

a → ۴

	۱	۲	۳
b	۰	۲	۰
c	۱۰	۶	۰
d	۰	۰	۸

c → ۳

	۱	۲
b	۰	۲
d	۰	۰

b → ۱

d → ۲

ساختمان	پیمانکار	هزینه
A	۴	۴۴
B	۱	۵۶
C	۳	۹۰
D	۲	۴۴
		۲۳۴

هزینه این تخصیص برابراست با: (میلیون تومان) ۲۳۴= ۴۴+۵۶+۹۰+۴۴

تذکر: چنانچه با یک بسط درقدم چهارم طبق قاعده، کلی بالا ،نتوان مناسب ترین استراتژی را با هزینه صفر به دست آورد، بسط را طبق قاعده کلی(یعنی انتخاب کوچکترین عدد پوشیده نشده و کسر آن از سایر اعداد واضافه کردن آن به محل های برخورد خطوط) ادامه داده تا مسئله به جواب مطلوب برسد.

بیشینه کردن سوددرمسائل تخصیص کار

در مسئله تخصیص کارممکن است ماتریس ابتدایی به جای هزینه، برمبنای سود تهیه شده باشد و درنتیجه هدف تصمیم، بیشترین سود به جای دست یافتن به کمترین هزینه باشد.در حل اینگونه مسائل یکی از ساده ترین روش ها آن است که ابتدا کلیه اعداد ماتریس سود را از بزرگترین عدد موجود در آن کسر نموده و سپس مانند روش هزینه به بسط ماتریس ادامه دهیم تا مناسب ترین استراتژی بطوری که بیشترین سود را موجب شود، به دست آید.

❋**مثال:** به جدول زیر که مشخص کننده سود درشرایط مختلف واگذاری است، توجه نمایید، برای حل، کلیه اعداد ماتریس را از عدد ۱۲ کم می کنیم:

		a	b	c						
	اوس?له	۴	۷	۵			۱	۸	۵	۷
فعال?ت	۲	۹	۱۲	۸	تبدیل به ماتریس هزینه →		۲	۳	۰	۴
	۳	۳	۸	۱۰			۳	۹	۳	۲

اینک با روش بسط ماتریس ها، طبق آنچه درمورد ماتریس هزینه ذکر شد، خواهیم داشت:

۸	۵	۷	۱	۳	۰	۲	۲	۰	۰	۲
۳	۰	۴	→	۳	۰	۴	→	۰	۰	۴
۹	۴	۲		۷	۲	۰		۴	۲	۰
۳	۰	۰	۲	۵	۰	۰	۲	۱		
→	۰	۰	۴	→	۰	۰	۴	۲		
ماتریس پایانی	۴	۲	۰		۴	۲	۰	۳		
		a	b							
۳ →	c	۱ ۰	۰							
→		۲ ۰	۰							

پس مناسب ترین استراتژی عبات است از:

جواب دوم			
هزینه	**سود**	**وسیله**	**فعالیت**
۲	۱۰	C	۳
۳	۹	a	۲
۵	۷	B	۱
۱۰	۲۶	–	

جواب اول			
هزینه	**سود**	**وسیله**	**فعالیت**
۲	۱۰	C	۳
۸	۴	A	۱
۰	۱۲	B	۲
۱۰	۲۶	–	

مشاهده می شود که سود خالص حاصل از هر دو استراتژی بایکدیگر برابر و مساوی ۲۶ است، چنین استراتژی های را که همگی می توانند مناسب ترین به حساب آیند استراتژی های معادل می نامند و گفته می شود که مسئله دویا چند جواب مطلوب دارد. به عبارت بهتر، هرگاه در ماتریس پایانی تعداد صفرها برای ردیف یا ستونی بیش از یکی باشد، امکان یافتن چند جواب بهینه وجود دارد.

عدم توازن درمسائل تخصیص کار

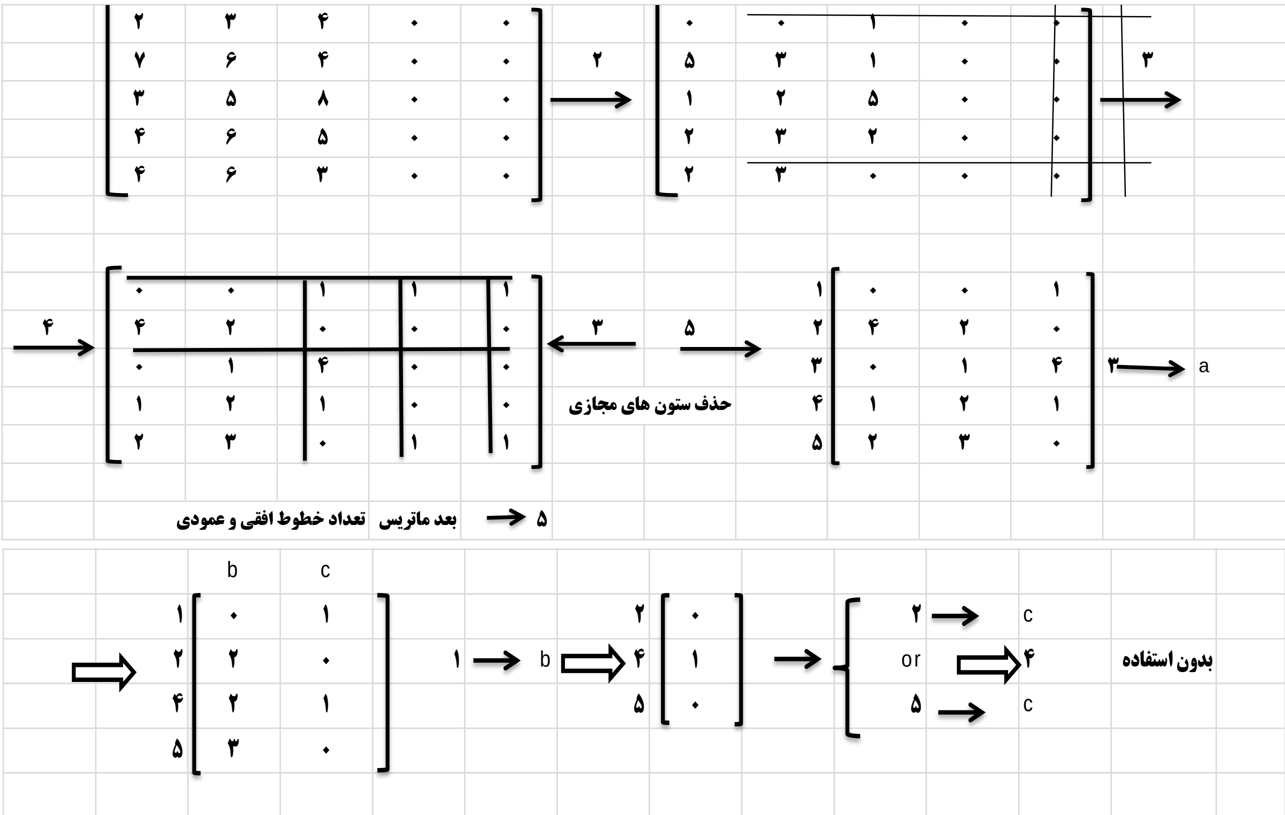
درمسائل تخصیص، اساس کار آن است که، ماتریس ابتدایی مربع باشد، یعنی تعداد ردیف ها وستون ها برابر باشند. اما گاه درمسائل عملی چنین نبوده و ممکن است تعداد ردیف ها بیشتر از تعداد ستون ها باشد، در چنین حالاتی با افزودن یک ستون یا یک ردیف مجازی با هزینه یا سود صفر می توان ماتریس را مربع و مسئله را قابل حل نمود. به عنوان مثال اگر پنج فعالیت مفروض باشد که قرار است به شش وسیله واگذار شوند، مسئله را می توان با اضافه کردن یک فعالیت مجازی با هزینه صفر حل نمود.

مثال:

یک شرکت ساختمانی دارای پنج دستگاه بولدوزر است که در حال حاضر در پنج نقطه مختلف به شماره های ۱ الی ۵ قرار دارند. سه محل ساختمان مختلف هر کدام به یک بولدوزر احتیاج دارند، اگر هزینه حمل و نقل بولدوزرها به سه محل ساختمانی به قرارزیر باشدمناسب ترین طرح برای رساندن سه بولدوزر به سه محل ساختمانی کدام است؟ به شرط اینکه هزینه حمل و نقل کمترین مقدار را داشته باشد.

ساختمان / محل استقرار	a	b	c
۱	۲	۳	۴
۲	۷	۶	۴
۳	۳	۵	۸
۴	۴	۶	۵
۵	۴	۶	۳

به منظور حل ابتدا دو ستون مجازی به مسئله افزوده، قدم اول قابل اجرا نیست زیرا در تمام سطرها عدد صفر کمترین عدد است، بدین ترتیب خواهیم داشت:



در نتیجه بهترین تخصیص عبارت است از : فرستادن از محل(۱) به ساختمان b با هزینه ۳، از محل(۳) به ساختمان a با هزینه۳، از محل (۲)به ساختمان c با هزینه ۴، از محل (۵) به ساختمان c با هزینه ۳، از آنجایی که فرستادن از محل (۵) به ساختمان c هزینه کمتری نسبت به فرستادن از محل (۲) به ساختمان c دارد، پس این گزینه را می پذیریم. بنابراین بولدوزرهای مستقر در محل (۲) و (۴) بدون استفاده خواهند بود. کل هزینه نیز برابربا ۹ خواهد شد.

فصل دوازدهم

مدل حمل و نقل

مدل حمل و نقل

مقدمه

همانطور که قبلاً گفته شد الگوریتم سیمپلکس می تواند برای حل مسائل گوناگونی از مدل های برنامه ریزی خطی بکار گرفته شود. با این حال هرگاه مسئله ای دارای ساختاری خاص باشد، تکنیک های کاراتری برای حل مسئله وجود دارد. مدل حمل و نقل یکی از این مدل هاست. مطالعه مسائل حمل و نقل به طور واقعی قبل از توسعه کلی برنامه ریزی خطی مورد بحث قرار گرفت. در سال ۱۹۳۹ کانترویچ (L .V. Kantoeovitch) مسئله حمل و نقل را مورد مطالعه قرار داد. و در سال ۱۹۴۱ هیچکاک (Hitchcock) یک فرمول بندی ریاضی که در حال حاضر به طور استانداردمورد استفاده قرار می گیردوبه مسئله هیچکاک موسوم است را ارائه کرد.

کوپمانس (T . C . koopmans) نیز در سال ۱۹۴۷ در این زمینه تحقیقاتی کرد و به این جهت گاهی نامش با این مسئله همراه است.

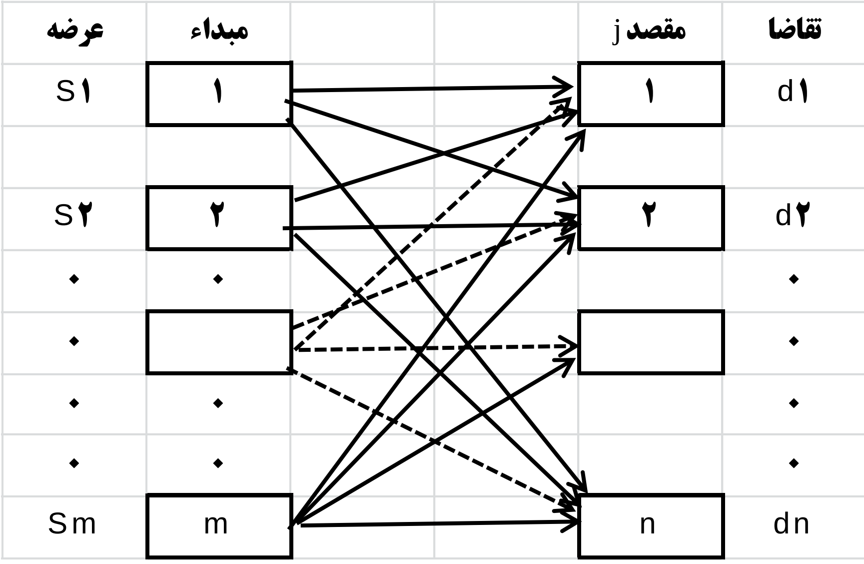
بخاطر ساختار ویژه این نوع مسائل می توان آنها را توسط روشهایی حل نمود که محاسبات آنها به مراتب کمتر از روش سیمپلکس است. با اینکه مدل های حمل و نقل را می توان برای بسیاری از مسائل بکار برد اما کاربرد ویژه حمل و نقل محصولات باعث شده که نام اینگونه مدل ها متناسب با کاربردشان باشد.

دلایل استفاده از مسئله حمل و نقل:

۱. بسیاری از مسائل واقعی که در طبیعت وجود دارد بدین روش فرموله می شود.
۲. بدلیل ساختار خاص مسائل حمل و نقل با الگوریتم های کاراتر از روش سیمپلکس قابل حل می باشد.
۳. این الگوریتم ها در صورتی که اطلاعات اولیه عدد صحیح باشد جواب صحیح را حاصل می سازد.

مدل حمل و نقل به شکل شبکه ای در نظر گرفته می شود که گره های آن نمایانگر مقاصد و مبادی می باشد. در قلمرو پژوهش عملیاتی حمل و نقل مقدار معینی از یک محصول از m نقطه به عنوان مبداء برای عرضه به n نقطه به عنوان مقصد جهت ارضا(تأمین) تقاضای مقصدها بصورت یک مدل حمل و نقل با توجه به موارد زیر تعریف می گردد.

۱) هزینه حمل معین باشد.
۲) تقاضای مقصدها از طریق عرضه کالا از مبادی (مبداء ها) تامین گردد.



اگر $\mathbf{x_{ij}}$ بیانگر میزان کالایی باشدکه از مبداء $\mathbf{i}$ $(\mathbf{i = 1, 2, 3, \dots., m})$ به مقصد $\mathbf{j}$ $(\mathbf{j = 1, 2, 3, \dots, n})$ حمل شود مدل برنامه ریزی خطی آن بصورت زیر خواهد بود.

$$\boldsymbol{Min\ Z = \sum\sum x_{ij}c_{ij}}$$

$$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i}$$

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_i}$$

$$\boldsymbol{x_{ij} \geq 0}$$

علاوه بر مطالب فوق فرض بر این است که $\mathbf{\sum S_i = \sum d_j}$

$\mathbf{x_{ij}}$: مقدار کالایی است که از مبداء $\mathbf{i}$ به مقصد$\mathbf{j}$ حمل می شود.

$\mathbf{C_{ij}}$: هزینه حمل هر واحد کالا از مبداء $\mathbf{i}$ به مقصد $\mathbf{j}$

نکته:

در مسائل حمل و نقل مهم نیست که تقاضای هر مقصد از کدام مبداء تامین می شود بلکه فقط هزینه حمل و نقل مدنظراست هدف از مدل حمل و نقل تعیین مقدار کالایی است که باید از مبداء $\mathbf{i}$ به مقصد $\mathbf{j}$ ارسال شود تا کل هزینه حمل و نقل حداقل گردد.

جدول اصلی مدل حمل و نقل بصورت زیر می باشد.

مقاصد / مبادی	۱	۲	۳	...	n	عرضه
۱	C_{11}	C_{12}	C_{13}	...	C_n	S_1
۲	C_{21}	C_{22}	C_{23}	...	C_n	S_2
۳	C_{31}	C_{32}	C_{33}	...	C_n	S_3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
M	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}		C_{mn}	S_m
تقاضا	d_1	d_2	d3	...	d_n	

C_{11} :هزینه حمل هر واحد کالا از مبداء ۱ به مقصد۱

C_{21} : هزینه حمل هر واحد کالا از مبداء ۲ به مقصد ۱

C_{32} : هزینه حمل هر واحد کالا از مبداء ۳به مقصد۲

❊مثال:

هدف ارسال محصولی از سه شهر۱، ۲ و۳ به سه شهرA ، B و C می باشد. هزینه حمل هر واحد کالا و میزان عرضه و تقاضا در جدول زیر به نمایش در آمده است می خواهیم با حداقل هزینه تقاضای شهرهای فوق را تامین کنیم. این مسئله را بفرم مدل حمل و نقل فرموله نمائید.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
۱	۱۵	۱۲	۲۴	۴۰۰
۲	۷	۸	۱۵	۳۰۰
۳	۲۷	۱۸	۲۱	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

جدول مدل حمل و نقل را به صورت زیر نمایش می دهند.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
۱	۱۵ X_{1a}	۱۲ X_{1b}	۲۴ X_{1c}	۴۰۰
۲	۷ X_{2a}	۸ X_{2b}	۱۵ X_{3c}	۳۰۰
۳	۲۷ X_{3a}	۱۸ X_{3b}	۲۱ X_{3c}	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

$\mathbf{X_{1A}}$: مقدار کالایی که از مبداء ۱ به مقصد A حمل می شود.

$\mathbf{X_{3B}}$: مقدار کالایی که از مبداء ۳ به مقصدB حمل می شود.

تابع هدف: $Z = 15X_{1a} + 12X_{1b} + 24X_{1c} + 7X_{2a} + 8X_{2b} + 15X_{2c} + 27X_{3a} + 18X_{3b} + 21X_{3c}$

محدودیت های عرضه :

$X_{1a} + X_{1b} + X_{1c} = 400$

$X_{2a} + X_{2b} + X_{2c} = 300$

$X_{3a} + X_{3b} + X_{3c} = 100$

محدودیت های تقاضا:

$X_{1a} + X_{2a} + X_{3a} = 360$

$X_{1b} + X_{2b} + X_{3b} = 300$

$X_{1c} + X_{2c} + X_{3c} = 140$

ساختار مدل حمل و نقل دارای مشخصات زیر است:

۱. ضرایب تمامی متغیرهای تصمیم در محدودیت ها یک است.
۲. هر یک از متغیرهای تصمیم در محدودیت ها فقط دوبار ظاهر می شود(یکبار در محدودیت های عرضه و یکبار در محدودیت های تقاضا)
۳. مجموع عرضه و تقاضا برابر است.

مشخصات فوق امکان حل مسائل حمل و نقل را با الگوریتم حمل و نقل فراهم می آورد. جواب بدست آمده از این طریق همواره جوابی موجه است.

مراحل لازم برای حل مسائل حمل و نقل:

گام اول: مطمئن شوید که مقدار عرضه کل و تقاضای کل برابراست. اگر اینگونه نبود مسئله را به روشی که گفته خواهد شد اصلاح کنید.

گام دوم: یک جواب اساسی موجه ابتدائی بدست آورید.

گام سوم: تمامی متغیرهای غیراساسی را بدین منظور که کدام یک می تواند موجب بهبود تابع هدف شود ارزیابی کنید(تعیین متغیر ورودی) اگر متغیری برای بهبود تابع هدف نباشدجواب بهینه است، در غیر اینصورت متغیری که بهترین اثر در بهبود تابع هدف را دارد انتخاب کنید و به مرحله چهارم بروید.

گام چهارم: یکی از متغیرهای اساسی فعلی را با حفظ شرایط غیرمنفی بودن متغیرها برای خروج انتخاب کنید.

گام پنجم: جواب اساسی موجه جدید را بدست آورید و به گام سوم برگردید.

بدست آوردن جواب اساسی موجه ابتدائی

روشهای متعددی برای بدست آوردن جواب موجه ابتدائی وجود دارد که از جمله این روشها عبارتند از:

۱) روش گوشه شمال غربی
۲) روش کمترین هزینه
۳) روش تخمین و گل Vogel
۴) روش حداقل سطر

۱. روش گوشه شمال غربی

مراحل:

۱. به خانه واقع در گوشه شمال غربی(گوشه چپ بالایی) جدول حمل و نقل حداکثر مقدار ممکن را اختصاص دهید. (با توجه به اینکه این مقدار نباید از میزان عرضه و تقاضای سطر وستون مربوطه تجاوز کند).
۲. در صورت امکان تخصیص به خانه مجاور خانه قبلی بیشترین مقدار ممکن را اختصاص دهید.
۳. مرحله۲ را آنقدر تکرار کنید تا عرضه و تقاضای تمام سطرها و ستونها برآورده شود.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
۱	۳۶۰ (۱۵)	۴۰ (۱۲)	۰ (۲۴)	۴۰۰
۲	۰ (۷)	۲۶۰ (۸)	۴۰ (۱۵)	۳۰۰
۳	۰ (۲۷)	۰ (۱۸)	۱۰۰ (۲۱)	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

$$Z = (360 \times 15) + (40 \times 12) + (260 \times 8) + (40 \times 15) + (100 \times 21) = 10660$$

۲. روش کمترین هزینه

مراحل:

۱) بیشترین عدد را به خانه ای اختصاص دهید که کمترین هزینه را داشته باشد سپس مقادیر عرضه و تقاضای مربوط به سطر و ستون مربوطه را بیابید.

۲) مرحله یک را آن قدر ادامه دهید تا مقادیر عرضه و تقاضای تمام سطرها و ستونها برآورده شود.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
۱	۶۰ (۱۵)	۳۰۰ (۱۲)	۴۰ (۲۴)	۴۰۰
۲	۳۰۰ (۷)	۰ (۸)	۰ (۱۵)	۳۰۰
۳	۰ (۲۷)	۰ (۱۸)	۱۰۰ (۲۱)	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

$Z = (60 \times 15) + (300 \times 12) + (40 \times 24) + (300 \times 7) + (100 \times 21) = 9660$

نکته: تعداد خانه های پر جدول m+n-1

۳. روش تخمین وگل

مراحل:

۱. جریمه هر سطر و ستون را بدست آورده برای محاسبه جریمه ها در هر سطر و ستون اختلاف بین دو کمترین هزینه در هر سطر یا ستون را محاسبه نمایید.(کمترین)

۲. سطر یا ستونی را انتخاب نمائید که بیشترین جریمه را داشته باشد.(بیشترین)

۳. بیشترین عدد را به خانه ای در جدول حمل و نقل اختصاص دهید که سطر یا ستون مربوط به آن خانه بیشترین جریمه را داشته باشد و ضمناً در سطریا ستون مربوطه دارای کوچکترین هزینه حمل و نقل باشد(کمترین).

۴. مراحل ۱و ۲ و۳ را تکرار کنید تا عرضه و تقاضای مربوط به تمامی سطرها و ستونها برآورده شود.(بیشترین)

❋مثال:

با استفاده از روش تخمین وگل یک جواب موجه ابتدایی برای مدل حمل و نقل زیر بیابید و هزینه کل را محاسبه نمائید.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
۱	۶۰ $\boxed{۱۵}$	۳۰۰ $\boxed{۱۲}$	۴۰ $\boxed{۲۴}$	۴۰۰
۲	۳۰۰ $\boxed{۷}$	۰ $\boxed{۸}$	۰ $\boxed{۱۵}$	۳۰۰
۳	۰ $\boxed{۲۷}$	۰ $\boxed{۱۸}$	۱۰۰ $\boxed{۲۱}$	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

مرحله ۱	مرحله ۲	مرحله ۳	مرحله ۴
۳	۳	۱۲	۲۴
۱	۰	۰	۰
۳	۳	۳	۲۴

مرحله ۱	۸	۴	۶
مرحله ۲	۱۲	۶	۳
مرحله ۳	۰	۶	۳
مرحله ۴	۰	۰	۳

$Z = (60 \times 15) + (300 \times 12) + (40 \times 24) + (300 \times 7) + (100 \times 21) = 9660$

۴. روش حداقل سطر

مراحل:

۱. خانه ای که دارای کمترین هزینه در سطر اول است را پیدا می کنیم و حداکثر مقدار ممکن را به این خانه تخصیص دهید.

۲. اگر مقدار جدید تقاضا برای یک ستون صفر گردد آن ستون و اگر مقدار جدید عرضه برای یک سطر صفر گردد آن سطر را در عملیات بعدی در نظر نگیرید.

۳. گامهای ۱ و۲ را به ترتیب برای دومین سطر تا آخرین سطر انجام دهید در صورتیکه تمامی مقادیر عرضه و تقاضا برآورده شده باشد عملیات خاتمه یافته در غیر این صورت عملیات را از سطر اول تکرار نمائید.

***مثال:**

با استفاده از روش حداقل سطر یک جواب موجه ابتدایی برای مدل حمل و نقل زیر بیابید.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
۱	۶۰ $\boxed{15}$	۳۰۰ $\boxed{12}$	۴۰ $\boxed{24}$	۴۰۰
۲	۳۰۰ $\boxed{7}$	۰ $\boxed{8}$	۰ $\boxed{15}$	۳۰۰
۳	۰ $\boxed{27}$	۰ $\boxed{18}$	۱۰۰ $\boxed{21}$	۱۰۰
تقاضا	۳۶۰	۳۰۰	۱۴۰	۸۰۰

$Z = (60 \times 15) + (300 \times 12) + (40 \times 24) + (300 \times 7) + (100 \times 21) = 9660$

***مثال:** مدل حمل و نقل زیر را در نظر بگیرید.

الف)با استفاده از روش گوشه شمال غربی یک جواب موجه ابتدائی برای مدل بیابید و هزینه کل را محاسبه نمایید.

ب)با استفاده از روش کمترین هزینه یک جواب موجه ابتدائی برای مدل بیابید و هزینه کل را محاسبه نمایید.

ج) با استفاده از روش حداقل سطر یک جواب موجه ابتدائی برای مدل بیابید و هزینه کل را محاسبه نمایید.

روش گوشه شمال غربی

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
۱	۱۵۰ [۶]	۰ [۸]	۰ [۱۰]	۱۵۰
۲	۵۰ [۷]	۱۰۰ [۱۱]	۲۵ [۱۱]	۱۷۵
۳	۰ [٤]	۰ [٥]	۲۷۵ [۱۲]	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

$Z = (150 \times 6) + (50 \times 7) + (100 \times 11) + (25 \times 11) + (275 \times 12) = 5925$

روش کمترین هزینه

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
۱	۰ [۶]	۲۵ [۸]	۱۲۵ [۱۰]	۱۵۰
۲	۰ [۷]	۰ [۱۱]	۱۷۵ [۱۱]	۱۷۵
۳	۲۰۰ [٤]	۷۵ [٥]	۰ [۱۲]	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

$Z = (25 \times 8) + (125 \times 10) + (175 \times 11) + (200 \times 4) + (75 \times 5) = 4550$

روش حداقل سطر

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
۱	۱۵۰ [۶]	۰ [۸]	۰ [۱۰]	۱۵۰
۲	۵۰ [۷]	۰ [۱۱]	۱۲۵ [۱۱]	۱۷۵
۳	۰ [٤]	۱۰۰ [٥]	۱۷۵ [۱۲]	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

$Z = (150 \times 6) + (50 \times 7) + (125 \times 11) + (100 \times 5) + (175 \times 12) = 5225$

نکاتی در رابطه با جداول حمل و نقل

نکته۱: در جداول حمل و نقل متغیرهای اساسی آندسته از متغیرهایی هستند که مقادیری به آنها تخصیص یافته است یا به عبارت دیگر خانه های پر و دارای عدد در فاکتور حمل و نقل بیانگر متغیرهای اساسی هستند.

نکته۲: در جداول حمل و نقل متغیرهای غیراساسی آن دسته از متغیرهایی هستند که مقادیری به آنها تخصیص نیافته است یا به عبارت دیگر خانه های خالی در تابلوی حمل و نقل بیانگر متغیرهای غیراساسی هستند.

نکته۳: تعداد متغیرهای اساسی در تابلوی حمل و نقل باید برابر m+n-1 باشد.

نابرابری عرضه و تقاضا در تابلوی حمل و نقل:

۱) بیشتر بودن کل عرضه از کل تقاضا در تابلوی حمل و نقل

اگر مقدار کل عرضه از مقدار کل تقاضا بیشتر باشد باید ستونی تحت عنوان ستون مجازی ایجاد کرد. مقدار هزینه های مربوط به ستون مجازی صفر می باشد و متغیرهای مربوط به ستون مجاز را متغیرهای مجازی می نامند. مقادیر تخصیص یافته به متغیرهای مجازی هیچگونه مفهومی ندارد و به معنی عرضه مازادی است که قابل حمل به مقصد نمی باشد. هزینه حمل و نقل مربوط به متغیرهای مجازی باید صفر باشد. به عبات دیگر کالای حمل نشده هزینه ای نخواهد داشت.

※مثال:

تابلوی حمل و نقل نامتوازن زیر داده شده است ضمن متعادل کردن آن جواب موجه اولیه آنرا به روش گوشه شمال غربی پیدا کنید.

مقاصد / مبادی	A	B	C	D(مجازی)	عرضه
۱	**۱۰۰** $\boxed{۶}$	**۲۰** $\boxed{۸}$	**۰** $\boxed{۱۰}$	**۰** $\boxed{۰}$	**۱۲۰**
۲	**۰** $\boxed{۷}$	**۳۰** $\boxed{۱۱}$	**۱۵۰** $\boxed{۱۱}$	**۰** $\boxed{۰}$	**۱۸۰**
۳	**۰** $\boxed{٤}$	**۰** $\boxed{٥}$	**۰** $\boxed{۱۲}$	**۱۰۰** $\boxed{۰}$	**۱۰۰**
تقاضا	**۱۰۰**	**۵۰**	**۱۵۰**	**۱۰۰**	**۴۰۰** / **۳۰۰**

نکته: یک متغیر اساسی با مقدار صفر در تابلوی حمل و نقل وجود دارد. این امر بخاطر آن است که بطور همزمان سطر دوم و ستون C صفر شده اند(ظرفیت تکمیل شده) طبق خاصیت بیان شده هرگاه یک سطر و ستون بطور همزمان صفر شوند می بایست به منظور رعایت تعداد متغیرهای اساسی (m+n-1) در تابلوی حمل و نقل یک متغییر اساسی با مقدار صفر تعریف نمود. در صورتیکه تابلوی حمل و نقل دارای متغییر اساسی صفر باشد گفته می شود که مدل حمل و نقل دارای حالت خاص تبهگنی (تباهیدگی) است.

۱. بیشتر بودن کل تقاضا از کل عرضه در تابلوی حمل و نقل

اگر مقدار کل تقاضا از مقدار کل عرضه بیشتر باشد به منظور متوازن کردن تابلوی حمل و نقل می بایست یک سطر عرضه با مقدار عرضه معادل اختلاف تقاضای کل نسبت به عرضه کل به تابلوی حمل و نقل اضافه کرد سطر اضافه شده را سطر مجازی گویند و هزینه حمل تمام متغیرهای آن برابرصفر است.

***مثال:** تابلوی حمل و نقل نامتوازن زیر داده شده است پس از متوازن ساختن آن جواب موجه ابتدائی آنرا با استفاده از روش کمترین هزینه محاسبه نمائید.

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
۱	۰ [۶]	۰ [۸]	۵۰ [۱۰]	۵۰
۲	۰ [۷]	۰ [۱۱]	۱۲۰ [۱۱]	۱۲۰
۳	۵۰ [٤]	۱۲۰ [۵]	۱۰ [۱۲]	۱۸۰
۴ (مجازی)	۵۰ [۰]	۰ [۰]	۰ [۰]	۵۰
تقاضا	۱۰۰	۱۲۰	۱۸۰	۳۵۰ / ۴۰۰

فنون یافتن جواب بهینه در مدل حمل و نقل:

1. **روش سنگ پله**
2. **روش توزیع اصلاح شده**

روش سنگ پله

پس از یافتن جواب موجه اولیه یا ابتدائی بوسیله هر یک از روشهای چهارگانه ذکر شده قدم بعدی حل مدل حمل و نقل برای یافتن جواب بهینه است یعنی جوابی که هزینه کل حمل و نقل را حداقل کند. یکی از روشهای متداول برای حل مدل جهت بررسی شرط بهینگی و یافتن جواب بهینه روش سنگ پله است هدف از بکارگیری روش سنگ پله بررسی میزان تاثیر اختصاص کالا به هر یک از خانه های خالی جدول اولیه مدل حمل و نقل بر روی هزینه کل است. بعبارت دیگر هدف این است که تاثیر حمل کالا از هر یک از مسیرهایی که براساس جواب موجه اولیه بلا استفاده هستند بررسی شوند. بدین معنی که آیا تخصیص کالا از مسیرهای

فعلی به مسیرهای بلاء استفاده موجب کاهش هزینه حمل و نقل خواهد شد یا خیر؟ درصورتیکه مسیری پیدا شود که تخصیص کالا به آن مسیر منجر به کاهش هزینه کل شود می بایست حداکثر مقدار ممکن را به آن مسیر اختصاص داد.

مراحل روش سنگ پله:

۱. مسیر سنگ پله کلیه متغیرهای غیراساسی (خانه های خالی) را ترسیم نمائید.
۲. مقدار متغیر در هزینه کل تابلوی حمل و نقل را به ازای تخصیص یک واحد کالا به خانه های خالی با استفاده از مسیر سنگ پله محاسبه نمائید.
۳. در صورتیکه مقادیر بدست آمده از مسیر سنگ پله برای خانه های خالی جدول (+) مثبت یا صفر بودند توقف کنید در غیر این صورت به مرحله بعد بروید.
۴. خانه ای را که دارای منفی ترین مقدار است را به عنوان متغیر ورودی (مسیر جدید حمل و نقل) انتخاب نمائید.
۵. مسیر سنگ پله متغیر ورودی جدید (خانه خالی دارای منفی ترین) را در نظر بگیرید و با توجه به خانه هایی که دارای علامت ۱- هستند ودر رأس مسیر سنگ پله قرار دارند مقدار تخصیص به متغیر ورودی جدید را معین کنید. حداکثر مقدار ممکن قابل تخصیص به متغیر ورودی جدید از قاعده کوچکترین مقدار مربوط به خانه های با علامت ۱- در مسیر سنگ پله بدست می آید.
۶. باتعیین متغیر خروجی یا خانه ای که مقدار آن باید برابر صفر گردد. علامت انتقال را برای ترسیم تابلوی جدی حمل و نقل انجام دهید. برای ترسیم تابلوی جدید حمل و نقل متغیرهای اساسی خارج از مسیر سنگ پله را عیناً بنویسید و درمسیر سنگ پله به متغیر اساسی جدید حداکثر مقدار ممکن را (کوچکترین مقدار مربوط به خانه های با علامت ۱- تخصیص دهید و این مقدار را از متغیرهای اساسی دارای علامت ۱- مسیر سنگ پله کم کرده و به خانه های با علامت ۱+ اضافه نمایید تا اینکه مقدار تخصیص متغیر خروجی صفر شود.
۷. مراحل ۱تا ۶ را آنقدر تکرار کنید تا کلیه مقادیر بدست آمده از مسیرهای سنگ پله برای خانه های خالی غیرمنفی شود.

روش ترسیم مسیر سنگ پله:

۱. مسیر سنگ پله همواره از یک خانه خالی به عنوان مبداء آغاز می شود از یک مسیر بسته و منحصر به فرد از خانه های که دارای عدد هستند می گذرد و در نهایت به همان خانه خالی مبداء ختم می شود.

۲. در ایجاد یک مسیر سنگ پله می توان از خانه های خالی یا پر عبور کرد ولی محل چرخش مسیر حتماً باید یک خانه پر باشد.

۳. پس از هر حرکت افقی باید یک حرکت عمودی و پس از هر حرکت عمودی باید یک حرکت افقی صورت پذیرد. بنابراین در هر سطر و ستون هر واحد افزایش (۱+) باید با یک واحد کاهش (۱-) همراه باشد.

٭مثال:

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
۱	۶ **۰** **+۱**	۸ **۲۵** **−۱**	۱۰ **۱۲۵**	**۱۵۰**
۲	۷ **۰**	۱۱ **۰**	۱۱ **۱۷۵**	**۱۷۵**
۳	٤ **۲۰۰** **−۱**	۵ **۷۵** **+۱**	۱۲ **۰**	**۲۷۵**
تقاضا	**۲۰۰**	**۱۰۰**	**۳۰۰**	**۶۰۰**

۶−۸+ ۵−۴ = −۱

1A : 1A → 1B → 3A → 1A

مقاصد / مبادی	A	B	C	عرضه
۱	۰ [۶]	−۱ [۸]	۱۲۵ +۱ [۱۰]	۱۵۰
۲	۰ +۱ [۷]	۰ [۱۱]	۱۷۵ −۱ [۱۱]	۱۷۵
۳	۲۰۰ −۱ [٤]	۷۵ +۱ [۵]	[۱۲]	۲۷۵
تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۶۰۰

۷−۱۱+۱۰−۸+۵−۴ = −۱

2A : 2A 2C → 1C → 1B → 3B → 3A → 2A

با توجه به اینکه همه مقادیر مثبت و صفر شده پس جدول حمل و نقل همان طور می ماند و مقدار Z بهینه می باشد.

فصل سیزدهم

تحلیل شبکهCPM , PERT

تحلیل شبکه

مدل های حمل و نقل و تخصیص (فصل های ۱۱ و ۱۲)بخشی از مدل های برنامه ریزی خطی و به عبارت دیگر، زیر مجموعه ای از مدل های خطی شبکه هستند.در این فصل ، مسائل دیگری از برنامه ریزی خطی را که به صورت شبکه مدل سازی می شوند، توضیح خواهیم داد. از میان انواع مسائل شبکه ، در این فصل به توضیح موارد زیر می پردازیم:

1. **کوتاهترین مسیر (Shotest route)**
2. **حداکثر جریان (Maximal flow)**
3. **حداقل درخت در برگیرنده (Minimal spanning tree)**
4. **روش مسیر بحرانی CPM**
5. **روش ارزیابی و بازنگری پروژه ها PERT**

مقدمه :

سطوح برنامه ریزی

تلاش برای رسیدن به اهداف در سه سطح زیر برنامه ریزی می شود:

۱) برنامه ریزی بلند مدت: تصمیمات بلند مدت و استراتژیکی که برای تعیین هدف گرفته می شوند و دارای افق زمانی ۱۵ تا ۲۵ سال است که در زمان حال در نظام بودجه ی ایران به آن *برنامه* گویند و جنبه کیفی دارد مانند برنامه ی توسعه ی شبکه ی راههای کشور.

۲) برنامه ریزی میان مدت : شامل تصمیماتی است که در راستای برنامه ریزی بلند مدت و در افق زمانی ۵ تا ۱۰ سال گرفته می شود که در زمان حال در نظام بوجه ی ایران به آن *طرح* گویند مانند طرح احداث راههای اصلی .

۳) برنامه ریزی کوتاه مدت: شامل فعالیتهای مرتبط و منطقی می باشد که در راستای برنامه ریزی کوتاه مدت انجام آنها برای رسیدن به هدف ضرورت دارد که در نظام بودجه ی ایران به آن *پروژه* گویند مانند پروژه اتوبان شیـــراز- اصفهـــان.

کارهایی که در طول زمان انجام می شوند به ۲ دسته تقسیم می شود:

۱. کارهایی که مداوم و مستمرند: مانند کارهایی که برای تولید در یک کارخانه در یک روز انجام می شود.

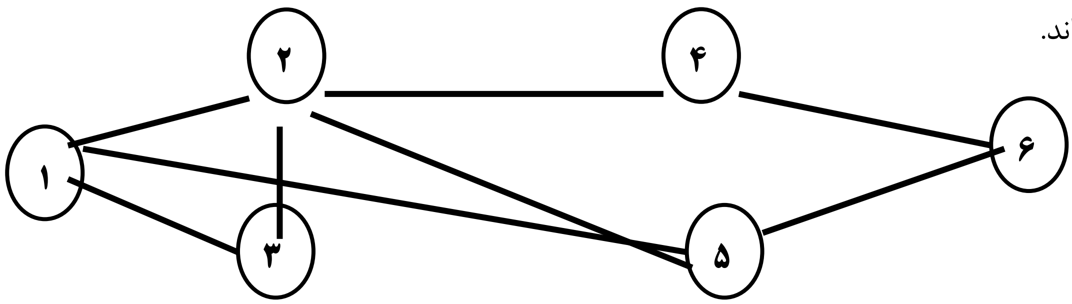
۲. کارهایی که منحصر به فرد هستند: این کارها منحصر به فرد و غیر تکراری اند مانند احداث کارخانه.

تعریف پروژه

فرآیند ی منحصر به فرد که شامل فعالیت هایی مشخص و منطقی و دارای تاریخ های شروع و پایان مشخص است که انجام آنها برای رسیدن به هدفی منطبق با الزامات ضرورت داردو دارای محدودیت های زمان ، منابع ، هزینه و کیفیت است.

تعاریف:

شبکه یا گراف خطی: شامل تعدادی گره می باشد که برخی یا تمامی آنان توسط شاخه ها به یکدیگر، متصل شده اند.



شکل ۱-۱۳

از شاخه ها، جریان عبور می نماید که با توجه به این مطلب به دو دسته تقسیم می گردند:

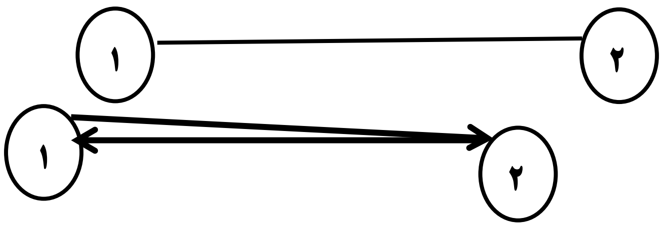
شاخه جهت دار: معمولاً در شبکه ها جریان هایی وجود دارد. اگر انتقال جریان در شاخه، تنها در یک جهت مجاز باشد به آن شاخه جهت دارد گفته می شود و با اضافه کردن یک پیکان به انتهای خطوط مشخص می شوند.

شاخه بدون جهت: اگر جریان در شاخه ای در هر دوجهت مجاز باشد شاخه بدون جهت نامیده می شود.

شبکه های جهت دار و بدون جهت: شبکه هایی که کلیه شاخه های آن جهت دار باشند شبکه جهت دار و شبکه هایی که تمامی شاخه های آن بدون جهت باشند، شاخه های بدون جهت نامیده می شوند.

(الف)

(ب)

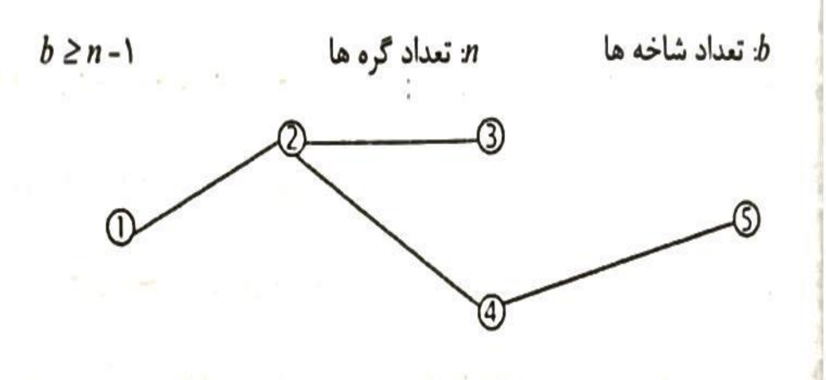


شکل ۲-۱۳

مسیر: مسیر بین دو گره عبارت است از یک سری شاخه های پی در پی که آن دو گره را به یکدیگر وصل می کنند.

حلقه: مسیری است که گره شروع و ختم آن یکی باشد.

درخت: شبکه ای که تمام گره های آن به هم متصل شده و فاقد حلقه باشد درخت نامیده می شود. درخت ها اگر n گره داشته باشند داری n-1 شاخه هستند. پس به طوری کلی تعداد شاخه ها در یک شبکه متصل شده از رابطه زیر به دست می آید.



شکل ۳-۱۳

مدل سازی برنامه ریزی خطی یک شبکه

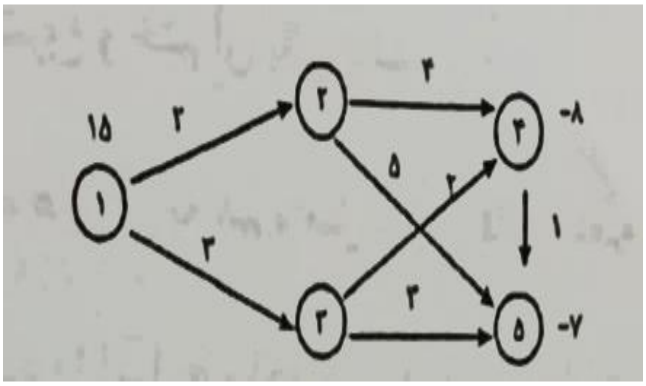
مدل های حمل و نقل و تخصیص، یکی از انواع مدل های شبکه می باشند که به صورت مدل برنامه ریزی خطی نیز قابل فرموله شدن هستند، در این قسمت با شیوه مدل سازی برنامه ریزی خطی یک شبکه به طور عام آشنا می شوید. هر گره در شبکه سه حالت می تواند داشته باشد:

الف) گره های ارسال کننده جریان: این گره ها مانند نقاط مبدا در مساله حمل و نقل هستند که عرضه کننده کالا (جریان) می باشند. میزان جریان انتقالی توسط این گره ها با اعداد مثبت در بالای آنها مشخص می شود.

ب) گره های دریافت کننده: این گره ها مانند نقاط مقصد در مساله حمل و نقل هستند که تقاضاکننده کالا(جریان) می باشند. میزان جریان دریافتی توسط این گره ها با اعداد منفی در بالای آنها مشخص می گردد.

ج) نقاط واسطه: این گره ها به همان میزانی که جریان یا کالایی را دریافت می کنند، ارسال هم می کنند به عبارت دیگر میزان دریافتی و ارسالی آنها برابر است. بر بالای این نوع گره هیچ عددی نوشته نمی شود.

مثال۱: برای توضیح در مورد مدل سازی یک شبکه به شکل زیر توجه کنید.



شکل۴-۱۳مدل شبکه

در این شبکه جهت دار گره ۱ به میزان ۱۵ واحد جریان را ارسال می کنند و گره های ۴ و ۵ به میزان ۸ و ۷ واحد متقاضی جریان می باشند. گره های ۲ و ۳ نقاط واسطه هستند. اعداد روی شاخه ها هزینه های انتقال جریان را نشان می دهند. متغیرهای تصمیم در این شبکه با $\mathbf{x_{ij}}$ نمایش داده شده و بیانگر میزان جریان ارسالی از گره **i** به گره **j** است. از آنجا که شبکه فوق ۷ شاخه دارد، مساله دارای ۷ متغیر تصمیم است. تابع هدف این شبکه با توجه به هدف حداقل کردن هزینه کل انتقال جریان چنین است:

$$Min\ Z = 2x_{12} + 3x_{13} + 5x_{25} + 4x_{24} + 2x_{34} + 3x_{35} + x_{45}$$

محدودیت های مدل براساس گره های موجود در شبکه نوشته می شود. گره ۱یک گره ارسال کننده است که می تواند به گره های ۲ و ۳ ارسال داشته باشد و میزان جریان ارسلی آن ۱۵ است. پس:

$$x_{12} + x_{13} = 15 \qquad \left(\text{محدودیت گره } \mathbf{1}\right)$$

اما گره ۲ یک نقطه واسطه است. که همان میزان جریان دریافتی از گره ۱ را به گره های ۴ و ۵ تحویل می دهد. لذا:

$$x_{24} + x_{25} = x_{12}$$
$$x_{24} + x_{25} - x_{12} = 0$$

به عنوان یک قرارداد در این کتاب هرگاه جریانی از یک گره ارسال می شود با ضریب (۱+) در محدودیت و هرگاه جریانی را دریافت می دارد با ضریب (۱-) در محدودیت نوشته می شود. بر این روال محدودیت مربوط به گره ۳ چنین است:

$$x_{34} + x_{35} - x_{13} = 0$$

گره های ۴ و ۵ گره های دریافت کننده هستند که محدودیت های آنها بدین صورت است:

$$-x_{24} + x_{34} - x_{45} = -8 \qquad \text{(محدودیت گره ۴)}$$

$$-x_{25} + x_{35} - x_{45} = -7 \qquad \text{(محدودیت گره۵)}$$

به این ترتیب مدل کامل شبکه فوق به صورت زیر است:

Min $Z = 2X_{12} + 3X_{13} + 5X_{25} + 4X_{24} + 2X_{34} + 3X_{35} + X_{45}$

$$x_{12} + x_{13} = 15$$
$$x_{24} + x_{25} - x_{12} = 0$$
$$x_{34} + x_{35} - x_{13} = 0$$
$$-x_{24} + x_{34} - x_{45} = -8$$
$$-x_{25} + x_{35} - x_{45} = -7$$

$X_{ij} \geq 0$ ($i = 4,3,2,1$ و $j = 5,4,3,2$)

نکات:

۱) **تعداد متغیرهای تصمیم با تعداد شاخه ها برابر است.**

۲) **تعداد محدودیت ها با تعداد گره ها برابر است.**

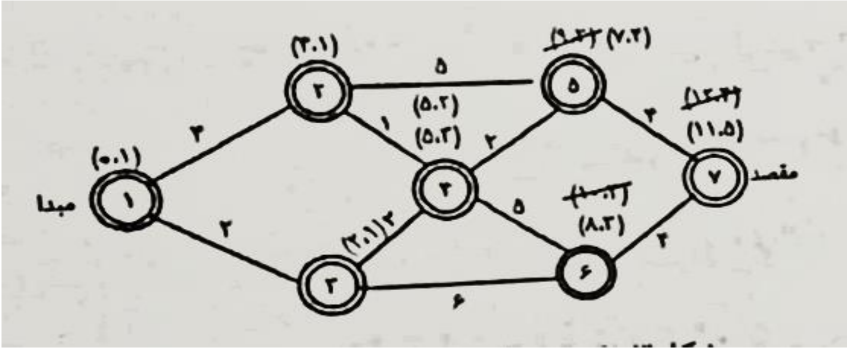
۳) **مجموع اعداد سمت راست تمام محدودیت ها صفر است.**

۴) **متغیرهای تصمیم در محدودیت ها فقط دوبار ظاهر می شوند، یک بار با ضریب (۱+) و یک بار با ضریب (۱-) به این ترتیب متغیرهای تصمیم در محدودیت ضریبی به جز (۱+) و (۱-) نمی تواند داشته باشند.**

۱- مسئله کوتاهترین مسیر در شبکه

مساله کوتاه ترین مسیر به منظور تعیین بهترین مسیری است که کوتاه ترین فاصله بین دو گره مبدا و مقصد را ارائه می کند. از این مدل برای تعیین مسیرهایی که کم ترین زمان یا هزینه را ارائه کند نیز می تواند استفاده کرد. شیوه های متعددی برای تعیین کوتاه ترین مسیر در شبکه وجود دارد که در اینجا به توضیح مختصر روش کوتاه ترین مسیر اکتفا می شود.

برای یافتن روش کوتاه ترین مسیر در یک شبکه به هر گره یک نشانه داده می شود. هر نشانه شامل دو عدد است که در پرانتز و بر بالای هر گره نوشته می شود. عدد اول بیانگر فاصله گره مبدا تا گرهی است که برای آن نشانه زده می شود و عدد دوم نشان دهنده شماره گره ماقبل است. نشانه ها دو نوع هستند «دائم» و«موقت». نشانه دائم غیرقابل تغییر است اما نشانه های موقت نشانه هایی هستند که در صورت یافتن نشانه بهتر، یعنی نشانه ای که با فاصله کمتری تا مبدا دارد، قابل تغییر است.



شکل ۵-۱۳ یافتن کوتاه ترین مسیر در شبکه

گام۱) به گره مبدا نشانه دائم (۱ و ۰) اختصاص دهید. عدد صفر به مفهوم فاصله گره مبدا تا خودش می باشد و عدد دوم شماره گره شروع را نشان می دهد.

گام۲) به تمامی گره هایی که از گره مبدا منشعب می شوند(یعنی گره های ۲ و ۳) به طور موقت نشانه بزنید (این نشانه ها برای گره های ۲ و ۳ به ترتیب (۱ و۴) و (۱و۲) می باشند). نشانه موقت هر گره با توجه به اندازه شاخه منشعب از گره با نشانه دائم و فاصله این گره تا مبدا معین می شود.

گام۳) از میان گره هایی که دارای نشانه موقت هستند، گرهی را که دارای کم ترین فاصله تا مبدا است انتخاب ونشانه آن را با دو دایره ای کردن برروی آن به نشانه دائم تبدیل کنید(گره۳ چون کوتاه ترین فاصله تا مبداءرا دارد به دائم تبدیل می شود). اگر تمام گره ها نشانه دائم داشته باشند، توقف کرده و به گام ۵بروید.(چون فقط گره ۳ نشان دائم دارد باید به گام ۴ رفت).

گام۴)تمام گره هایی را که در همسایگی آخرین گرهی که نشانه دائم داشته و بدون نشانه یا نشانه موقت هستند و تنها با یک شاخه به این گره متصل شده را در نظر بگیرید (گره ۴ و ۶ را در نظر بگیرید). برای این گره ها، نشانه موقت زده و اگر دارای نشانه موقت باشند در صورتی که نشانه محاسبه شده جدید دارای فاصله ای کم تر از نشانه موقت قدیم باشد، نشانه قدیم را با جدید عوض کنید و اگر هر دو با هم مساوی باشند هر دو را نگاه دارید، در این حالت مساله ممکن است بیش از یک جواب بهینه داشته باشد (نشانه های موقت گره۴)، (۳ و ۵) و گره ۶(۳ و ۸) می باشد. چون از میان سه گره۶، ۴، ۲ گره ۲ کم ترین فاصله تا مبدا را دارد نشانه آن به دائم تبدیل می شود، سپس برای گره های ۴ و ۵ نشانه موقت اختصاص می یابد این نشانه ها(۲ و ۹) و (۲ و ۵) است. گره ۴ دارای دو نشانه موقت (۲و۵) و (۳و۵) است که چون هر دو نشانه فاصله یکسانی تا مبدا دارند هر دو نگه داشته شد و نشانه آن به دائم تبدیل می شود.

گام۵) نشانه های دائم برای هر گره نشان دهنده کوتاه ترین فاصله آن گره تا مبدا و گره منشعب شده قبلی آن است. برای پیدا کردن کوتاه ترین مسیر از این گره با توجه به نشانه های دائم رو به گره مبدا حرکت کرده و مسیر را پیدا کنید. چون نشانه گره۷، (۵ و ۱۱) است کوتاه ترین مسافت ۱۱ و مسیر از گره ۷ رو به گره مبدا و مشخص می شود. چون گره ماقبل ۷ طبق نشانه ۵ است پس قسمتی از مسیر شاخه ۷- ۵ بوده

است و براساس نشانه گره۵، گره ماقبل ۴ بوده و گره قبلی ۴ گره ۳ یا۲ بوده و گره قبلی ۱ ، ۳ می باشد. به این ترتیب دو مسیر بهینه به شرح زیر وجود دارد.

مسافت	مسیر
۱۱	۱ → ۳ → ۴ → ۵ →۷
۱۱	۱ → ۲ → ۴ → ۵ →۷

مسئله حداکثر جریان در شبکه

مسئله حداکثر جریان در مورد تعیین حداکثر جریان (مایعات، ترافیک، اطلاعات و غیره) بین مبدا و یک مقصد در یک شبکه می باشد، بطوری که این جریان قبل از رسیدن به مقصد از ایستگاه های واسطه عبور می نماید و هر شاخه ظرفیت معینی برای ارسال جریان دارد.

مدل برنامه ریزی حداکثر جریان

مدل حداکثر جریان به صورت زیر است:

$Max\ V$

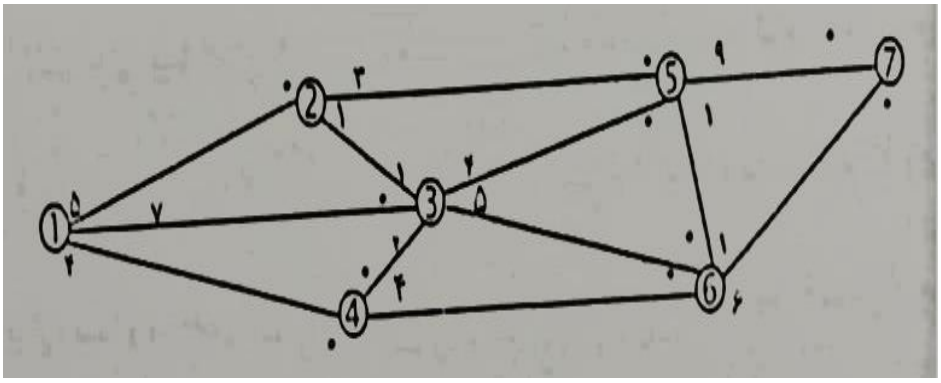
$\sum_{k\neq j} x_{kj} - \sum_{k\neq j} x_{kj} = V$ اگر j گره مبدا باشد.

$\sum_{k\neq j} x_{kj} - \sum_{k\neq j} x_{kj} = 0$ اگر j نه مبدا باشد و نه گره مقصد باشد .

$\sum_{k\neq j} x_{kj} - \sum_{k\neq j} x_{kj} = -V$ اگر j گره مقصد باشد .

$0 \leq x_{kj} \leq U_{ij}$

در مدل فوق x_{kj} متغیری است که میزان جریان در واحد زمان را در شاخه ای که گره j را به k وصل می کند نشان می دهد و U_{ij} نشان دهنده ظرفیت جریان در واحد زمان در شاخه ها می باشد.



شکل ۶-۱۳شبکه ای برای تعیین حداکثر جریان

دو عدد نوشته شده برروی هر شاخه یکی نشان دهنده جریان از گره (i به j) ودیگری نشان دهنده جریان از گره (j به i) است. مثلاً دو عدد ۵ و صفر بر روی شاخه (۶-۳) به مفهوم ظرفیت ارسال جریانی معادل ۵ واحد از گره (۳ به ۶) و صفر واحد از گره (۶ به ۳) می باشد.

حداکثر جریان در این مسیر با توجه به نکات زیرتعیین می شود:

۱. جریان خروجی از یک گره با جریان ورودی آن گره مساوی است.
۲. حداکثر میزان جریانی که در یک مسیر می توان از مبدا به مقصد فرستاد با شاخه ای که دارای کمترین ظرفیت ارسال در این مسیر است برابر است. گام های متوالی حل مسئله جریان به صورت زیر می باشد.

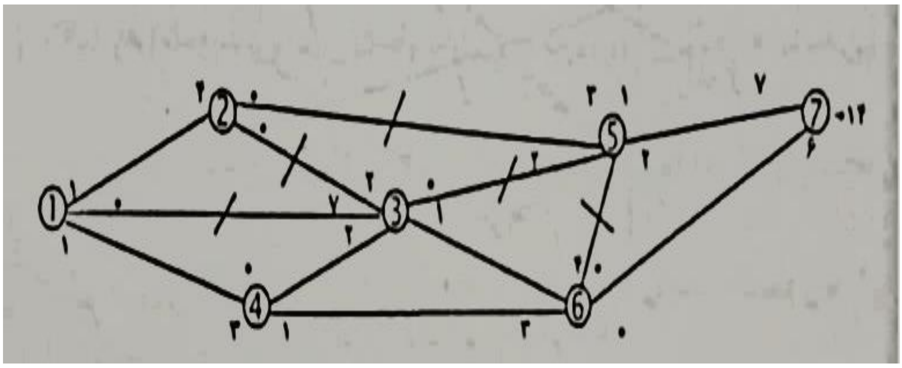
گام۱- مسیر۷-۶-۳-۱ را در نظر می گیرم: جریان مسیر عبارت است از : (۰و۶)(۰و۵)(۰و۷) که حداکثر جریان قابل قبول عبوری ۵ می باشد. بعد از تعدیل جریان عبوری به صورت (۵و۱)(۵و۰)(۵و۲) خواهد شد.

گام۲- مسیر ۷-۵-۲-۱ با جریان (۰و۹)(۰و۳)(۰و۵) که دارای حداکثر جریان عبوری ۳ می باشد بعد از تعدیل جریان بصورت (۳و۶)(۳و۰)(۳و۲) خواهد شد.

گام ۳- مسیرهای۷-۵-۳-۲-۱ و ۷-۵-۳-۱ و ۷-۶-۴-۱ و ۷-۵-۶-۴-۱ و سپس ۷-۵-۳-۶-۴-۱ را انتخاب می کنیم که بعد از انتخاب آخرین مرحله مشاهده می گردد که دیگر مسیری که ظرفیت مثبت داشته باشد وجود ندارد و این تکرار نهایی است و حداکثر جریان در شبکه ۱۴ می باشد.

نکته: هنگامی که مقدار جریان خروجی از یک گره صفر شد آن مسیر دارای ظرفیت منفی می شود.

یافتن مسیر مبدا به مقصد :



شکل۷-۱۳ تکرار ۷ برای مسئله حداکثر جریان

برای کشف این مسیر، ابتدا تمام گره هایی که می توانند با یک شاخه که دارای ظرفیت مثبت در جهت رسیدن به مقصد باشد را به گره مبدا وصل کنید. این گره ها را به تمام گره های جدیدی که دارای ظرفیت مثبت در جهت مقصد بوده و با یک شاخه به آنها وصل می شود متصل کرده و اینکار را آنقدر ادامه دهید تا این که یا به مقصد برسد و یا دیگر گره جدیدی وجود نداشته باشد.

برش	گروه مبداء	گروه مقصد	ظرفیت برش
A	۱	۴و۳و۲	۹
B	۳و۱	۴و۲	۱۰
C	۲و۱	۴و۳	۱۹
D	۳و۲و۱	۴	۱۳

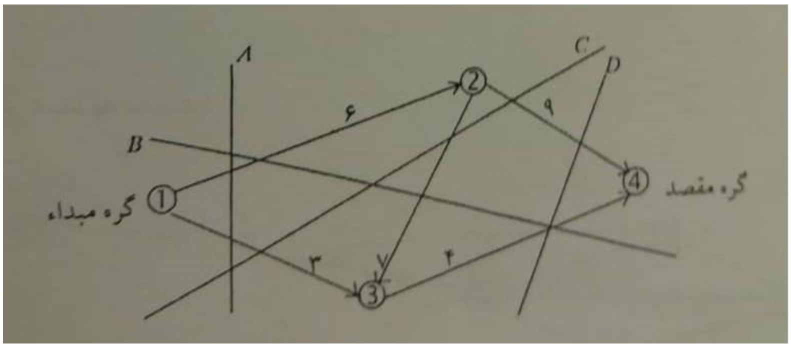
شکل ۸-۱۳ رویه برای پیدا کردن یک مسیر با ظرفیت مثبت از مبدا به مقصد

روش برش:

تعریف برش: جدا کردن تمامی گره ها به دو گره مجزا به طوری که مبدا در یک گروه، و مقصد در یک گروه دیگر باشد(مبدا و مقصد در یک گروه نیستند) برش نامیده می شود مجموع ظرفیت های بر روی این شاخه ها در جهت گره مبدا به مقصد ظرفیت برش نامیده می شود.

قضیه حداکثر جریان، حداقل برش: حداکثر جریان در هر شبکه معادل با ظرفیت حداقل برش می باشد.

حداکثر جریان را در شبکه زیر می توان پیدا کرد:



شکل ۹- ۱۳ برش های ممکن در شبکه

برش	گروه مبداء	گروه مقصد	ظرفیت برش
A	۱	۴و۳و۲	۹
B	۳و۱	۴و۲	۱۰
C	۲و۱	۴و۳	۱۹
D	۳و۲و۱	۴	۱۳

جدول ۱۰- ۱۳ تمامی برش های ممکن و ظرفیت آنها

برای تشکیل جدول۱۰-۱۳ به دو نکته زیر توجه شده است.

اول آنکه گره مبدا (گره ۱) برای کلیه برش های شبکه در زیر مجموعه «گروه مبدا» قرار گرفته و گره مقصد (گره۴) همواره در زیر مجموعه «گروه مقصد» واقع شده است.

دوم آنکه در برش B ظرفیت مسیر ۳- از محاسبه حذف شده است و فقط ظرفیت های مسیرهای ۲-۱ و ۴-۳برای محاسبه ظرفیت مقطعB در نظرگرفته شده است زیرا مسیرهای حرکت با توجه به تعریف ظرفیت برش باید از گره های مربوط به مجموعه «گروه مبدا» (گره های ۱. ۳) به سمت گره های مربوط به مجموعه «گروه مقصد»(گره های ۲ و ۴) هدایت شده باشد. حداکثر جریان در این شبکه معادل با کمترین مقدار ظرفیت های برش های انجام شده یعنی ۹ می باشد. این روش برای شبکه های جهت دار قابل استفاده است.

مسئله حداقل درخت در برگیرنده:

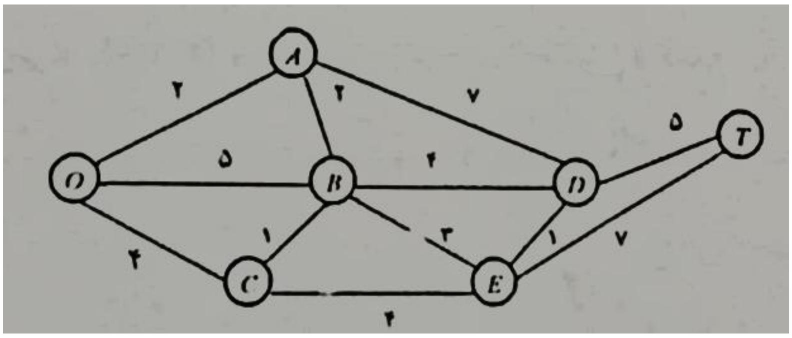
هدف در این مسئله عبارت است از ساختن شبکه ای متصل شده که در برگیرنده تمامی گره ها بوده و مجموع فاصله (هزینه ها، زمانها و ...) را در شبکه حداقل کند. تفاوت مسئله کوتاهترین مسیر و حداقل درخت در برگیرنده این است که در مسئله کوتاه ترین مسیر بعضی از گره های شبکه در مسیر قرار دارند که نهایتاً کوتاه ترین مسیر در شبکه را معین می نمایند در صورتیکه که در مسئله حداقل درخت دربرگیرنده ، درخت کلیه گره های شبکه را می پوشاند. این مسئله دارای کاربرد در زمینه هایی مانند لوله کشی، سیم کشی، توزیع کالا بین عمده فروشان مختلف توسط یک شرکت توزیع کالا و مسائلی از این قبیل می باشد.

حل مسئله حداقل درخت دربرگیرنده :

گام۱- یک گره را به دلخواه انتخاب کنید و به نزدیکترین گره غیر متصل وصل کنید.

گام۲- گره غیرمتصلی را که نزدیکترین فاصله را به گره های متصل شده قبلی دارد انتخاب و به آن وصل کنید. این کار را آنقدر ادامه دهید تا تمامی گره ها به هم وصل شوند.

مثال۲- کوتاهترین مسیر شبکه درختی برای شبکه زیر با توجه به گام های فوق به طریق زیر است :



شکل ۱۱- ۱۳مثالی برای مسئله کوتاهترین درخت در برگیرنده

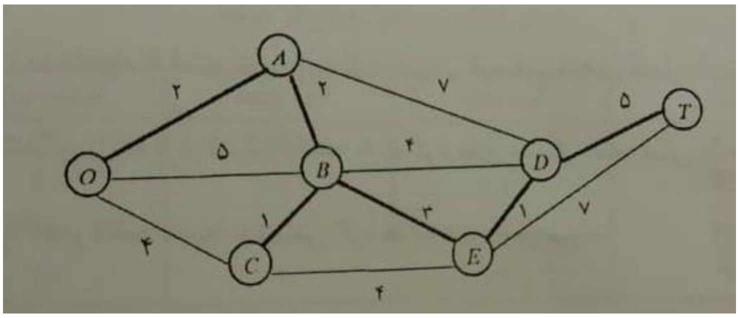
۱. بطوری اختیاری گرهO را انتخاب و نزدیک ترین گره به آن یعنیA را به آن وصل می نماییم.
۲. در مرحله بعد نزدیک ترین گره به A یا O، گره های B می باشد، آن را انتخاب و به B بهA وصل می شود.
۳. نزدیک ترین گره غیر متصل به O، A یا B گره C یم باشد و (نزدیک ترین به B) که به C وصل می شود.

۴. نزدیک ترین گره غیرمتصل بهO، A یا B گره C می باشد و (نزدیک ترین بهB) است که به B وصل می شود.

۵. نزدیک ترین گره غیر متصل به O، A یا B ، C یا E، گره D می باشد (نزدیک ترین به E) که به E وصل می شود.

۶. تنها گره غیر متصل گرهT نزدیک ترین گره به D می باشد که وصل می شود.

۷. تمام گره ها به هم وصل شده و جواب مسئله مجموع فاصله های شاخه های پر رنگ یعنی مقدار ۱۴ است.



شکل۱۲- ۱۳ تکرار برای مساله کوتاه ترین درخت در برگیرنده

تحلیل شبکه CPM, PERT

مقدمه

تحلیل مسیر بحرانی CPM و نمودار PERT ، ابزار های موثری هستند که در برنامه ریزی و مدیریت پروژه های پیچیده ، به شما کمک می کنند.

از ساده‌ترین روش‌های برنامه‌ریزی(علی‌الخصوص برای پروژه‌ها)، نمودارهای گانت و میله‌ای است؛ که اولی توسط هنری گانت و دیگری توسط فردریک تیلور ارائه شده‌اند. این دو نمودار به عنوان یکی از ساده‌ترین ابزارها برای نشان‌دادن زمان‌های آغاز و پایان فعالیت‌ها هنوز در بسیاری از مؤسسات و سازمان‌ها، به عنوان تنها روش برنامه‌ریزی، مورد استفاده قرار می‌گیرند. این نمودارها از دو محور عمود برهم تشکیل شده‌اند . محور افقی این نمودارها، نشان‌دهنده عامل زمان و محور عمودی آنها نشان‌گر فعالیت‌های لازم در اجرای پروژه است. از اشکالات عمده این نمودارها این است که ارتباط بین فعالیت‌ها و ترتیب تقدّم و تأخّر بین این فعالیت‌ها را نشان نمی‌دهند.

اشکالات این نمودارها و عدم کارآیی آنها در پروژه‌های بزرگ، مدیران را به فکر استفاده از تکنیک‌ها و فنون دیگری از جمله روش مسیر بحرانی و فن ارزشیابی و بازنگری برنامه انداخت.

در دهه ۱۹۵۰ میلادی گروهی از دانشمندان رشته تحقیق در عملیات (Operation Research) به فکر ایجاد روشی برای برنامه‌ریزی پروژه‌ها افتادند. آنها تکنیکی را به عنوان طولانی‌ترین مسیر غیر قابل کاهش

رویدادها، برای اجرای پروژه تعمیرات اساسی یک نیروگاه برق ابداع نمودند .این تکنیک بعدها به عنوان تکنیک ترتیب اصلی نامیده شد؛ که شباهت بسیار زیادی به روش‌های CPM و (Program Evaluation and Review Technique) PERTداشت. ولی این روش هرگز به صورت رسمی چاپ و منتشر نشد. تقریبا همزمان با این رویداد(۱۹۵۷)، شرکت تولیدی دوپان، یک گروه تحقیقاتی را مأمور بررسی روش کاربردهای جدید مدیریت در امور مهندسی شرکت نمود. این گروه بعدها با دکتر جان ماچلی از مرکز پژوهش‌های علمی شرکت یونیواک و مهندس کلی، از شرکت رمینگتون تکمیل شد. این گروه موفق به ابداع روش CPM شد.

این روش برای اولین بار در پروژه ساخت یک کارخانه برای شرکت دوپان به‌کار گرفته شد. پس از آن شرکت دوپان برای تعمیرات اساسی، در یکی از کارخانجات خود که دارای سیستم تولیدی پیوسته بود، از CPM استفاده کرد. برای انجام تعمیرات باید این خط تولید متوقف می‌شد؛ بنابراین هرگونه اقدام و ابتکاری که در کاهش زمان تعمیرات می‌توانست مؤثر باشد، کمک مهمی به شرکت می‌کرد. با استفاده از روش CPM زمان کل تعمیرات از 125ساعت به ۹۳ ساعت و در دوره‌های بعدی به ۷۴ ساعت کاهش پیدا کرد.

اساس روش CPM همان‌طور که ذکر شد، روش‌های گوناگونی برای تحلیل، برنامه‌ریزی، زمان‌بندی و کنترل پروژه ابداع شده‌اند؛ که روش نمودار میله‌ای و روش‌های تحلیل شبکه از جمله رایج‌ترین آنها هستند. روش‌های تحلیل شبکه؛ که در آنها از نمودارهای شبکه استفاده می‌شود، برای جبران تقاط ضعف عمده نمودارهای میله‌ای ابداع شده‌اند. اساس این روش‌ها عموما بر نظریه گراف مبتنی است. روش CPM نیز جزء روش‌های تحلیل شبکه است.

یک شبکه، تصویری از پروژه است که فعالیت‌های پروژه و روابط میان آنها را نشان می‌دهد. شبکه مانند قلب در کالبد روش‌های تحلیل شبکه است. مدیر پروژه، کارشناسان، پیمانکاران و واحدهای سهیم در اجرای پروژه، با در اختیار داشتن شبکه، می‌توانند تصورات و فرضیات قبلی خود درباره فعالیت‌های پروژه و روابط میان آنها را به طور عینی بررسی کرده و آنها را اصلاح نمایند. برای ترسیم شبکه که در واقع تصویر عینی روابط فعالیت‌های پروژه است، باید روابط میان فعالیت‌های پروژه را تعریف و تعیین کرد.

در هر شبکه حداقل یک راه (از اولین واقعه شبکه شروع و تا آخرین واقعه پروژه) وجود دارد؛ که شامل طولانی‌ترین زمان است .به این مسیر یا راه، مسیر بحرانی گفته می‌شود. رویدادهای بحرانی در یک شبکه، رویدادهایی هستند که دارای کمترین شناوری(که معمولا صفر است)، هستند؛ یعنی تفاضل بین زودترین و دیرترین تاریخ وقوع(شناوری) این رویدادها، صفر است. مسیر بحرانی نیز مسیری است که از آغاز تا پایان همواره از رویدادهای بحرانی عبور می‌کند.

مسیر بحرانی در واقع، وقت‌گیرترین توالی رخدادها و فعالیت‌های لازم برای تکمیل پروژه است؛که مدت اجرای پروژه نیز برابر طول مسیر بحرانی است.

در روش مسیر بحرانی با استفاده و توجّه کامل به مدت زمان، ارتباطات، وابستگی‌ها و توالی فعالیت‌ها، زودترین و دیرترین زمان شروع و خاتمه هر فعالیت، به طور قطعی، تعیین و مشخص می‌شود. توجه اصلی این روش روی محاسبه زمان‌های شناوری(فرجه) و میزان انعطاف در زمان اجرای فعالیت‌ها است.

موارد استفاده از CPM

قبل از اینکه مشخص شود که روش CPM با چه پروژه‌هایی تناسب دارد، اید فعالیت‌ها را با توجه به احتمال اجرا و زمان اجرای آنها، تقسیم‌بندی کرد. در یک پروژه، تعدادی از فعالیت‌ها هستند که در زمان برنامه‌ریزی(قبل از اجرا) مشخص است که به طور قطعی و مسلم انجام خواهند شد؛ که به آنها "فعالیت‌های قطعی" می‌گویند. ولی ممکن است اموری وجود داشته باشند، که انجام آنها الزامی شود و یا ممکن است که احتیاجی به انجام آنها نباشد. برای مثال در پروژه تعمیرات اساسی کارخانه، قبل از توقف ماشین‌ها و بازرسی قطعات، نمی‌توان گفت که آنها احتیاج به تعویض دارند یا خیر، به چنین فعالیت‌هایی که انجام آنها قطعی نباشد؛ "فعالیت‌های احتمالی "می‌گویند. همچنین از نظر طول زمان اجرای یک فعالیت نیز فعالیت‌ها را می‌توان به دو گروه: فعالیت‌های دارای زمان معین و فعالیت‌های دارای زمان احتمالی تقسیم‌بندی کرد. فعالیت‌های دارای زمان احتمالی، برخلاف فعالیت‌های دارای زمان معیّن، زمان اجرای آنها ثابت نیست و این زمان نسبت به حد متوسط برآوردها، انحراف زیادی دارد. مثلا در فصول بارندگی و در مناطق پرباران، فعالیت‌های جاده‌سازی، به علت بارندگی، دارای زمان احتمالی هستند.

برای پروژه‌های فاقد فعالیت‌ها و زمان‌های احتمالی، روش CPM مناسب است. همچنین برای پروژه‌های فاقد فعالیت‌های احتمالی، ولی دارای زمان‌های احتمالی، روش PERT مناسب است.

دو روشPERT و CPM دارای اختلافات عمده با همدیگر نیستند، بلکه فقط روش محاسبه مدت زمان انجام فعالیت‌ها در این دو متفاوت است. در برآورد مدت زمان فعالیت‌ها در روش PERT از متوسط زمان مورد انتظار و در CPM از محتمل‌ترین زمان ممکن استفاده می‌شود.

۱) روش مسیر بحرانی CPM

برای تمام وظایفی که باید به عنوان بخشی از یک پروژه ی بزرگ انجام شوند . برنامه ریزی کنید. بعلاوه در طول دوران مدیریت پروژه ، شما می توانید با کمک این راهکار ، دستاوردهای اهداف پروژه را بررسی کنید متوجه شوید که برای بازگرداندن پروژه به مسیر اصلی خود، باید چه اقدامات اصلاحی را انجام دهید.

دریک پروژه ممکن است شما طرح نهایی خود را تحت یک نمودار با نرم افزارهایی برای پروژه های متوسط با یک صفحه گسترده اکسل برای پروژه هایی که از پیچیدگی کمتری برخوردارند نمایش دهید. مزیت استفاده از این روش این است که به شما کمک می کندبرنامه ی خود را تست کرده و توسعه دهید و از کارایی و تاثیر آن مطمئن شوید. چه وظایفی را می توان به تعویق انداخت و منابع آن ها را به وظایف دیگری

اختصاص داد. یک از مزایای تجزیه و تحلیل مسیر بحرانی CPM این است که به شما کمک می کند زمان لازم برای تکمیل پروژه را مشخص کنید و متوجه شوید کدام پروژه را باید با شتاب پیش ببرید .

ـ رسم نمودار تحلیل مسیر بحرانی

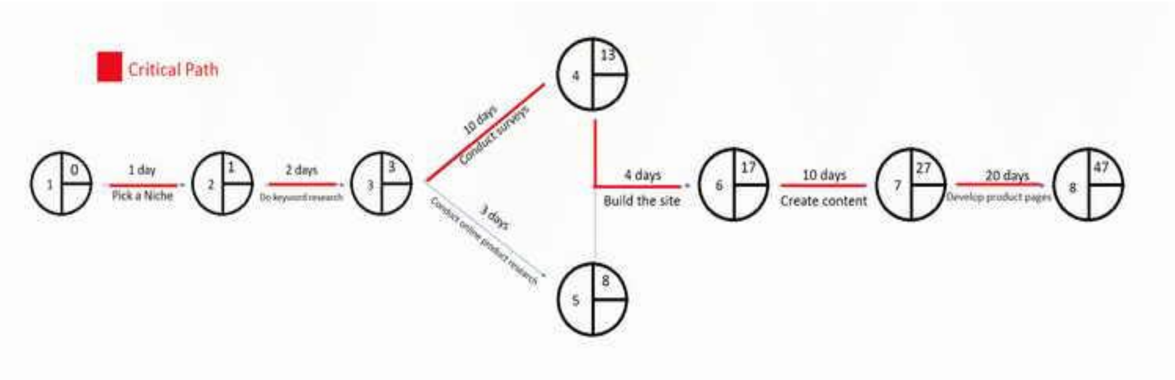
مرحلــه ۱: لیست فعالیت های برنامه

تاریخ شروع هرفعالیت را مشخص کنید و مدت زمان تکمیل آن را برآورد کنید.

مرحلــه ۲: ارتباط فعالیت ها را بصورت نموداری ترسیم کنید.

رویداد های هر پروسه (نظیر تاریخ شروع و پایان هرفعالیت) را با فلش به هم مرتبط کنید. بالای فلش ، بازه زمانی برآورد شده ی تکمیل فعالیت و پایین آن ، توضیح وظایف را می نویسند. به یاد داشته باشید که بردارهای بین وظایف ، همگی باید هم جهت با یکدیگر باشند(معمولاً از چپ به راست). این نمودار در نهایت به شما نشان می دهد که چه فرآیند هایی ، پیش نیاز فرآیند های دیگر هستند وشروع هر فعالیت ، وابسته به اتمام چه فعالیت ها،یا مراحل دیگری است.

به عنوان مثال به نمودار زیر توجه کنید:



همان‌طور که می‌بینید، در هر دایره، دو عدد نوشته‌شده که عدد سمت چپ، شماره‌ی فعالیت موردنظر (ترتیبی) و عدد بالا و سمت راست، روز شروع هر فعالیت است. بالای هر فلش، مدت‌زمان تخمینی هر فعالیت و زیر آن، توصیف فرآیند شرح داده‌شده. ما از این نمودار متوجه می‌شویم که فعالیت ۶، هفده روز پس از آغاز پروژه شروع می‌شود و احتمالاً ۱۰ روز به طول می‌انجامد .همچنین، شروع این فعالیت تنها زمانی امکان‌پذیر است که فعالیت‌های چهار و پنج، کاملاً به اتمام رسیده باشند.اغلب اوقات ، حداکثر زمان مجاز برای هر فعالیت را در ربع پایین و سمت راست دایره ذکر می کنند.

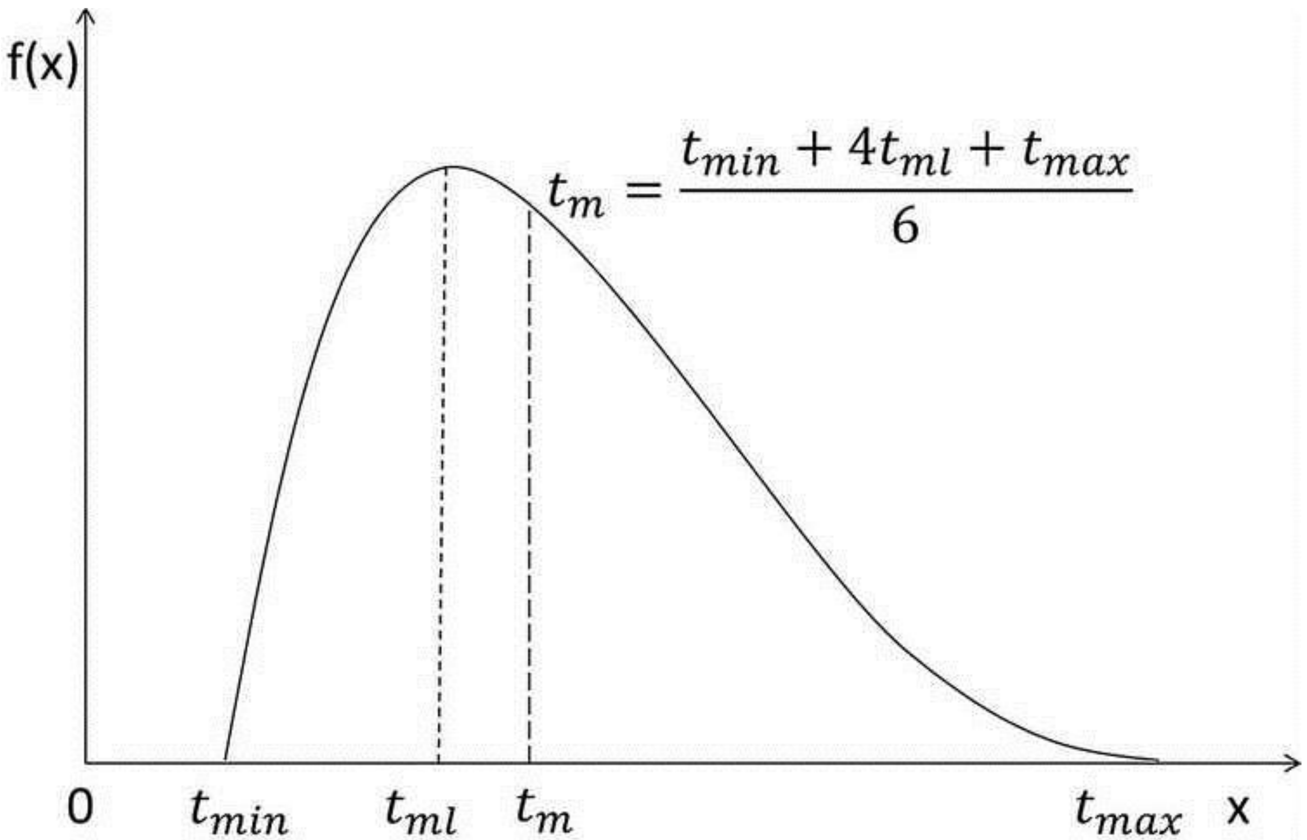
عملیات تسریع

گاهی اوقات ناچارید پروژه را زودتر از زمانی که CPA مشخص کرده، به پایان برسانید. در این حالت باید برنامه‌ی پروژه را دوباره تنظیم کنید.

شما گزینه‌های مختلفی پیش رو دارید و برای انتخاب بهترین راه‌حل، باید تأثیراتی را که هرکدام از این گزینه‌ها روی هزینه، کیفیت و زمان پروژه می‌گذارند، بررسی کنید. به‌عنوان‌مثال ممکن است با افزایش منابع هر فعالیت، بتوانید زمان پروسه را کاهش دهید. اما مهم این است که این تغییرات، چه تأثیری روی سایر فعالیت‌ها و نتیجه‌ی نهایی خواهد داشت.

مثلاً فرض می‌کنیم که یک پروژه‌ی کامپیوتری ۱۰ هفته‌ای را باید در مدت هشت هفته تحویل دهیم. در مرحله‌ی اول، به نمودار CPA نگاه می‌کنیم و فکر می‌کنیم اگر نیروهای انسانی سومین و چهارمین فعالیت را دو برابر کنیم، سرعت تکمیل وظایف افزایش پیدا می‌کند و می‌توانیم کار را دو هفته زودتر به پایان برسانیم. اما این تصمیم هزینه‌های پروژه را افزایش می‌دهد. از طرف دیگر، دو برابر کردن منابع انسانی، بهره‌وری کل تیم را فزایش می‌دهد. پس ما نیاز داریم که برآمد این تأثیرات را محاسبه کنیم.

گاهی اوقات کوتاه کردن مسیر بحرانی اصلی پروژه، مجموعه‌ای متفاوت از فعالیت‌ها را شکل می‌دهد که مسیر بحرانی ثانویه نامیده می‌شود.



۵) تکنیک ارزیابی و بازنگری برنامه ـ نمودار PERT

روش PERT هم مشابه با CPA ، برای تعیین فعالیت‌ها و ارزیابی زمان خاتمه‌ی پروژه (و گاهی محاسبه‌ی هزینه‌هاپ) مورداستفاده قرار می‌گیرد. با این تفاوت که CPA ، برای هر مرحله پروژه یک برآورد زمانی در نظر می‌گیرد اما درنمودارPERT ، ما با چهار برآورد خوش‌بینانه، بدبینانه، محتمل و مورد انتظار کار می‌کنیم:

(برآورد زمانی هر مرحله از پروژه= ۶/(کوتاه‌ترین زمان)+(۴ * زمان محتمل)+(طولانی‌ترین زمان)

این فرمول به ما کمک می‌کند از انحراف معیار ناشی از پیش‌بینی‌های خوش‌بینانه‌ی غیرواقعی، اجتناب کنیم.

آنالیز مسیر بحرانی یک روش مؤثر و قدرتمند برای ارزیابی و تشخیص موارد زیر است :

- ✓ چه فعالیت‌هایی باید تکمیل شود.
- ✓ چه احتمالاتی برای اجرای فعالیت‌های موازی وجود دارد.
- ✓ کوتاه‌ترین زمانی که می‌توانید پروژه را به پایان برسانید.
- ✓ منابع موردنیاز برای اجرای پروژه.
- ✓ ترتیب و توالی فعالیت‌ها، برنامه‌ریزی و زمان‌بندی.
- ✓ اولویت‌های کار.
- ✓ .کارآمدترین راه برای کاهش زمان پروژه‌های فوری

در پروژه‌های پیچیده، یک آنالیز مسیر بحرانی مؤثر، می‌تواند به معنی تمایز شکست و موفقیت کار باشد. CPA همچنین برای ارزیابی اهمیت مشکلاتی که در طول اجرای طرح به وجود می‌آیند، بسیار مفید واقع می‌شود.

روش PERT نوعی آنالیز مسیر بحرانی است که تخمین دقیق‌تری از مدت‌زمان اجرای هر فعالیت و پروسه ارائه می‌کند.

منابع :

۱) پژوهش عملیاتی ، برنامه ریزی خطی و کاربرد های آن – دکتر محمد رضا مهرگان

۲) پژوهش عملیاتی – دکتر محمد مشهدی زاده

۳) پژوهش عملیاتی – دکتر عادل آذر

۴) تحقیق در عملیات – کانون فرهنگی آموزشی

۵) تحقیق در عملیات – فرادرس

۶) اصول مدیریت علی رضائیان

۷) تحقیق در عملیات – دکتر حیدری

۸) پژوهش عملیاتی پارسه

۹) مدیریت و کنترل پروژه حاج‌شیرمحمدی، علی؛ ، اصفهان، انتشارت جهاد دانشگاهی

۱۰) پژوهش عملیاتی – سنجش و دانش

۱۱) پژوهش عملیاتی (مدل های احتمالی) – دکترمنصور مومنی

۱۲) مبانی نوین تحقیق در عملیات – دکتر منصور مومنی

۱۳) پژوهش عملیاتی پیشرفته – دکتر محمد رضا مهرگان

۱۴) مفاهیم و نکات پژوهش عملیاتی - دکتر محمد رضا مهرگان

۱۵) جزوات دانشگاهی آقایان دکتر حیدری ، دکتر جاویدنیا ،دکتر سعیدی ،دکتر غلامی عزیزی