

به نام خدا

ریاضیات محترمی

مدرس: جابر دارابی زاده سماکوس

دانشگاه فنی و حرفه‌ای

بهار ۱۳۹۹

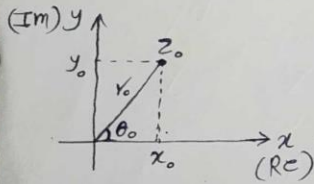
①

فصل اول: اعداد مختلط و توابع تحلیلی

در زمان‌های گذشته ریاضیدانان با معادلاتی به صورت $x^2 - x + 1 = 0$ و $x^2 = -1$ مواجه شدند که دارای هیچ ریشه حقیقی نبودند. بررسی چگونگی حل معادلاتی که دارای ریشه‌های حقیقی نیستند، به دانش اعداد مختلط گردید. بنام تعریف، یک عدد مختلط به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$z = x + iy \quad \text{که در آن } x \text{ و } y \text{ اعداد حقیقی هستند. } i = \sqrt{-1} \text{ را یکای موهومی گویند. (} i^2 = -1 \text{)}$$

$x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$. مجموعه اعداد مختلط که i را با C نمایش می‌دهند، فضای ذاتی با مجموعه $\mathbb{R}^2$ ناهم‌باز و تنها طرز نمایش آن‌ها متفاوت است. به عبارت دیگر عدد مختلط $x + iy$ همان زوج مرتب (x, y) در صفحه $\mathbb{R}^2$ می‌باشد. برای عدد مختلط $z = x_0 + iy_0$ تعاریف زیر را داریم:



$$\operatorname{Re}(z_0) = x_0, \quad \operatorname{Im}(z_0) = y_0, \quad |z_0| = r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$\arg(z_0) = \theta_0 = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0} & \text{if } x_0 > 0 \\ \pi + \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0} & \text{if } x_0 < 0, y_0 > 0 \\ -\pi + \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0} & \text{if } x_0 < 0, y_0 < 0 \end{cases} \quad \boxed{-\pi \leq \theta_0 \leq \pi}$$

فرم دکارتی: $z_0 = x_0 + iy_0$; $x_0 = r_0 \cos \theta_0$, $y_0 = r_0 \sin \theta_0$

فرم قطبی: $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$; $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\theta_0 = \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 > 0$)

با استفاده از رابطه اول می‌توان یک عدد مختلط را از فرم قطبی به فرم دکارتی تبدیل کرد:

رابطه اول: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \Rightarrow r_0 e^{i\theta_0} = r_0 \cos \theta_0 + i r_0 \sin \theta_0$

مثال: اعداد زیر را از فرم دکارتی به قطبی یا قطبی به دکارتی تبدیل کنید.

۱) $z = 1 + i \rightarrow r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\theta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} \rightarrow 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

۲) $z = -1 + \sqrt{3}i \rightarrow r = \sqrt{1+3} = 2$, $\theta = \pi + \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow -1 + \sqrt{3}i = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$

۳) $z = -2 - 2i \rightarrow r = 2\sqrt{2}$, $\theta = -\pi + \tan^{-1} 1 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \rightarrow -2 - 2i = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

۴) $z = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} (\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})) = 1 - i$

② جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد مختلط: با فرض $z_r = x_r + iy_r = r_r e^{i\theta_r}$ و $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\theta_1}$

برای جمع و تفریق اگر فرم قطبی z_1 و z_2 در دسترس باشد باید ابتدا آنها را به فرم دکارتی تبدیل کرد

$$z_1 z_r = (x_1 + iy_1)(x_r + iy_r) = x_1 x_r + i x_1 y_r + i y_1 x_r - y_1 y_r = (x_1 x_r - y_1 y_r) + i(x_1 y_r + y_1 x_r)$$

$$z_1 z_r = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_r e^{i\theta_r} = r_1 r_r e^{i(\theta_1 + \theta_r)}$$

$$\frac{z_1}{z_r} = \frac{x_1 + iy_1}{x_r + iy_r} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_r - iy_r)}{(x_r + iy_r)(x_r - iy_r)} = \frac{x_1 x_r + y_1 y_r}{x_r^2 + y_r^2} + i \frac{x_r y_1 - x_1 y_r}{x_r^2 + y_r^2}$$

$$\frac{z_1}{z_r} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_r e^{i\theta_r}} = \frac{r_1}{r_r} e^{i(\theta_1 - \theta_r)}$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را بدست آوریم.

۱) $(1+2i) + (2-3i) = 3-i$

۲) $(-2+i) - (1+i) = -3$

۳) $(2-i) \cdot (-1+\sqrt{3}i) = -2+2\sqrt{3}i+i+\sqrt{3} = (\sqrt{3}-2) + i(2\sqrt{3}+1)$

۴) $\frac{1-\sqrt{3}i}{-1+i} = \frac{(1-\sqrt{3}i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-i+\sqrt{3}i-\sqrt{3}}{2} = \frac{-(1+\sqrt{3})}{2} + i \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$

$(2-i) \cdot (-1+\sqrt{3}i) = \sqrt{2} e^{-i \tan^{-1} 1/2} \cdot \sqrt{2} e^{i \frac{2\pi}{3} - i \tan^{-1} \sqrt{3}} = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{2\pi}{3} - \tan^{-1} 1/2 - \tan^{-1} \sqrt{3})}$

$\frac{1-\sqrt{3}i}{-1+i} = \frac{2 e^{-i \frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{-i \frac{5\pi}{12}}$

تعریف مزدوج یک عدد مختلط:

طبق تعریف مزدوج عدد مختلط $z = x + iy = r e^{i\theta}$ را $\bar{z}$ میگویند که برابر است با:

$$\bar{z} = x - iy = r e^{-i\theta}$$

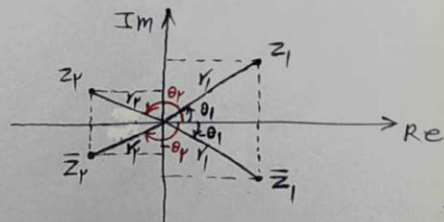
از نظر هندسی $\bar{z}$ قرینه z نسبت به محور حقیقی می باشد.

$z = 1+2i \rightarrow \bar{z} = 1-2i$

$z = -1-i \rightarrow \bar{z} = -1+i$

$z = e^{i\pi/4} \rightarrow \bar{z} = e^{-i\pi/4}$

$z = r e^{-i\pi/4} \rightarrow \bar{z} = r e^{i\pi/4}$



✓ خواص اعداد مختلط : اگر z_1, z_2 دو عدد مختلط z_1, z_2 و $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ مزدوج های آنها باشند، آنگاه :

- ۱) $|z| = |\bar{z}|$
- ۲) $z\bar{z} = |z|^2$
- ۳) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- ۴) $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- ۵) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- ۶) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- ۷) $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- ۸) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- ۹) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

نکته ① : $|z_1 - z_2|$ بیانگر فاصله ی دو عدد مختلط z_1 و z_2 می باشد.

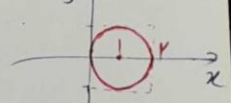
نکته ② : مجموعه نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $|z - z_0| = R$ صدق کنند، بیانگر دایره ای به مرکز z_0 و شعاع R می باشد. به شرط آنکه R عددی حقیقی و مثبت باشد.

نکته ③ : مجموعه نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $|z - z_0| = |z - z_1|$ صدق کنند، بیانگر عمود منصف پاره ای $z_0 z_1$ هستند.

نکته ④ : مجموعه نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $A|z - z_0| = B|z - z_1|$ صدق کنند بیانگر دایره ای در صفحه مختلط می باشند به شرط آنکه $A \neq B, A, B > 0$

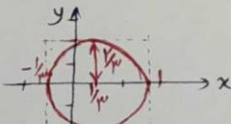
مثال : معادلات زیر را حل کنید و جواب را در صفحه مختلط رسم کنید.

۱) $|z - 1| = 1 \rightarrow |x + iy - 1| = 1 \rightarrow |(x-1) + iy| = 1 \rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

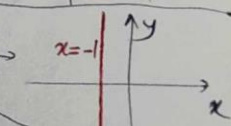


۲) $2|z| = |z + 1| \rightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \rightarrow 4(x^2 + y^2) = (x+1)^2 + y^2$

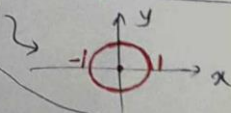
$3x^2 + 3y^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow (x - \frac{1}{3})^2 + y^2 = \frac{4}{9}$



۳) $|z| = |z + 2| \rightarrow x^2 + y^2 = (x+2)^2 + y^2 \rightarrow 4x + 4 = 0 \rightarrow x = -1$



۵) $\left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = z\bar{z} \rightarrow \frac{|z|}{|\bar{z}|} = z\bar{z} \rightarrow \frac{r}{r} = |z|^2 \rightarrow |z|^2 = 1 \rightarrow |z| = 1$

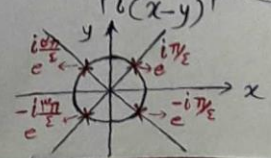


۵) $(iz + \bar{z})^2 = 2(i - z^2) \rightarrow$

$iz + \bar{z} = i(x + iy) + x - iy = (x - y) + i(x - y) \rightarrow (iz + \bar{z})^2 = (x - y)^2 (1 + i)^2 = 2i(x - y)^2$

$2(i - z^2) = 2(i - (x + iy)^2) = 2(y^2 - x^2 + i(1 - 2xy))$

$\Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow |x| = |y|, (x - y)^2 = 1 - 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$



۴

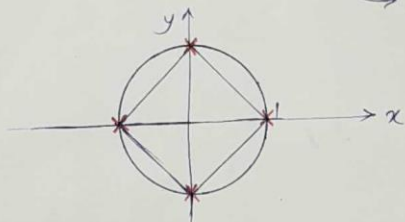
✓ ریشه های n ام یک عدد مختلط :

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{2k\pi + \theta}{n}} ; k=0, 1, 2, \dots, n-1$$

از نظر هندسی ریشه های n ام هر عدد مختلط بر ریشه های n ضلعی منتظم قرار دارند و زوایای بین هر دو ریشه متوالی است. $\frac{2\pi}{n}$

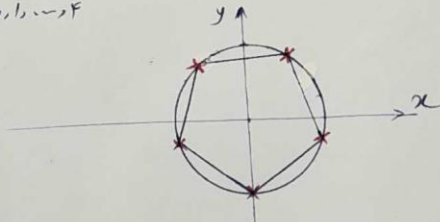
مثال: ریشه های چهارم عدد $z=1$ را بیابید.

$$z=1 \rightarrow z^{\frac{1}{4}} = 1^{\frac{1}{4}} e^{i \frac{2k\pi + 0}{4}} = e^{i \frac{k\pi}{2}} ; k=0, 1, 2, 3 \rightarrow z^{\frac{1}{4}} = e^{i0}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}}$$



ریشه های پنجم عدد $z=-i$:

$$z=-i = 1e^{-i\pi/2} \rightarrow z^{\frac{1}{5}} = 1^{\frac{1}{5}} e^{i \frac{2k\pi - \pi/2}{5}} = e^{-i\pi/10}, e^{i\pi/10}, e^{i3\pi/10}, e^{i5\pi/10}, e^{i7\pi/10} ; k=0, 1, \dots, 4$$



تقریباً ۱ ریشه های سوم عدد $z=1+i\sqrt{3}$ و ریشه های پنجم عدد $z=-1$ را بیابید.

✓ نواحی در صفحه مختلط :

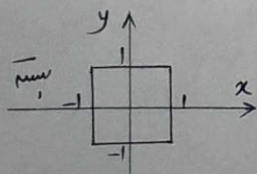
ϵ - همسایگی : $B_\epsilon(z_0)$ ، ϵ همسایگی z_0 در صفحه مختلط می نامیم و تعریف می کنیم :

$$B_\epsilon(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < \epsilon\}$$

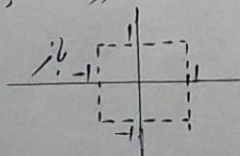
$$\epsilon - \text{همسایگی منزوف } z_0 : B_\epsilon(z_0) - \{z_0\}$$

- مجموعه باز : یک مجموعه را باز گوئیم هرگاه شامل هیچ یک از نقاط مرزی خود نباشد.

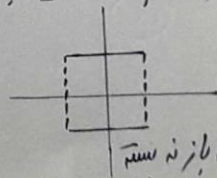
- مجموعه بسته : یک مجموعه را بسته گوئیم هرگاه شامل همه ی نقاط مرزی خود باشد.



$$S_1 = \{z = x+iy \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$



$$S_2 = \{z = x+iy \mid |x| < 1, |y| < 1\}$$



نه باز نه بسته

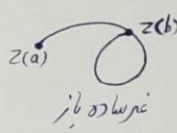
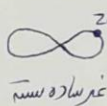
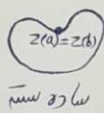
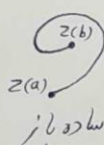
د)

✓ چند تعریف در رابطه با منحنی‌ها در صفحه مختلط :

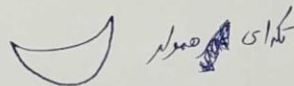
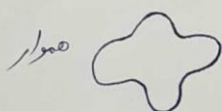
۱) منحنی C با معادله پارامتری $\begin{cases} z(t) = x(t) + iy(t) \\ a \leq t \leq b \end{cases}$ را بسیم گوییم هرگاه : $z(a) = z(b)$

اگر $z(a) \neq z(b)$ باشد، گوییم C یک منحنی باز است.

۲) منحنی C را ساده گوییم هرگاه خودش را قطع نکند. یعنی : $t_1 \neq t_2 \Rightarrow z(t_1) \neq z(t_2)$



۳) منحنی C را هموار گوییم هرگاه مماس بر منحنی در هر نقطه منحنی وجود داشته باشد (در هر نقطه مماس منحصر به فرد باشد)



۴) منحنی C را نگهدار هموار نامیم اگر تعداد نقاطی که در آن‌ها مماس بر منحنی وجود ندارد متناهی باشد.

✓ توابع مختلط :

تابع مختلط تابعی است که z عدد مختلط مثل z عددی مختلط مثل w را نسبت می‌دهد. مثلاً $f(z) = z^2$ یک تابع مختلط است.

این تابع $z = 1+i$ عدد $w = f(1+i) = (1+i)^2 = 2i$ را نسبت می‌دهد.

- حد و پیوستگی :

تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ دارای حد است هرگاه توابع دو مقسوم‌به $u(x, y)$ و $v(x, y)$ در (x_0, y_0) حد داشته باشند.

بنابراین شرط لازم و کافی برای حد داشتن $f(z)$ در z_0 اینست که توابع u و v در (x_0, y_0) پیوسته باشند.

- تعریف حد تابع $f(z)$ در $z = z_0$:

اگر تابع f در یک همسایگی z_0 تعریف شده باشد، در اینصورت $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ می‌باشد هرگاه شرایط زیر برقرار باشد :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 ; 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

همچنین تابع f را در $z = z_0$ پیوسته گوییم هرگاه اولاً f در z_0 موجود باشد و ثانیاً $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

نکته: اگر حد تابع f در z_0 برابر ∞ شده و نیاز به رفع ابهام داشته باشد، در این صورت برای یافتن حد تابع f در z_0 ؛
 (۱) اگر ضابطه f تنها بر حسب z باشد، با روش‌های حدگیری معمولی مثل هم‌ارزی و قاعده‌ی هسپیتال رفع ابهام کرده و مقدار حد را بدست می‌آوریم.

(۲) اگر در ضابطه f ، $\bar{z}$ نیز وجود داشته باشد، با جایگذاری $z = z_0 + re^{i\theta}$ به جای z و میل دادن r به سمت صفر مقدار حد تابع را بدست می‌آوریم. خاتمه این حد تابعی از θ باشد، حد تابع f در z_0 موجود نیست و اگر مقدار حد برابر عددی ثابت شود، تابع f در z_0 دارای حد بوده و مقدار حد برابر همان عدد ثابت است. این روش به روش قطب معروف است.

برای استفاده از روش قطبی اگر ضابطه f تابع مختلط صورت $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ باشد، قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$
 و سپس حد را بدست می‌کنیم.

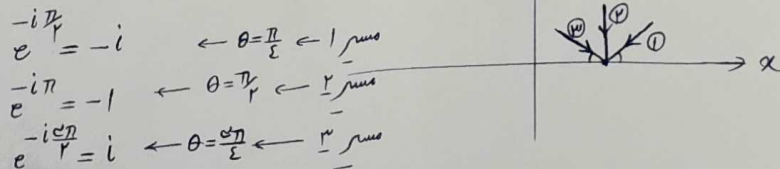
مثال: حد تابع مختلط زیر را بدست بکشید.

$$۱) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{2} = \frac{1}{2}$$

$$۲) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + \bar{z}}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{re^{i\theta} + re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-i\theta} + 1 \rightarrow \text{وجود ندارد (حد ندارد) } f(z) = \frac{z + \bar{z}}{z} \text{ در } z=0$$

$$۳) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\bar{z} - 1}{z - 1} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 + re^{-i\theta} - 1}{1 + re^{i\theta} - 1} = e^{-i\theta} \rightarrow \text{مقدار حد بستگی به این دارد که با هم} \rightarrow \text{حد موجود نیست}$$

زاویه‌ای به سمت نقطه‌ی $z=1$ نزدیک شویم



$$۴) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\bar{z})^2}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(re^{-i\theta})^2}{re^{i\theta}} = \lim_{r \rightarrow 0} re^{-i3\theta} = 0 \rightarrow \text{مقدار حد برابر صفر است}$$

$$۵) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \sin \theta \cos \theta \rightarrow \text{تابع } f \text{ در } z=0 \text{ حد ندارد}$$

۷

مثال: مقدار a را به گونه‌ای تعیین کنید که تابع $f(z) = \begin{cases} \frac{\sin^2 z}{1-\cos z} & z \neq 0 \\ a & z = 0 \end{cases}$ در $z=0$ پیوسته باشد.

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^2 z}{1-\cos z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin z \cos z}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} z \cos z = 0 \rightarrow a=0$$

مثال: مقدار a را به گونه‌ای تعیین کنید که تابع $f(z) = \begin{cases} \frac{z+\bar{z}}{z} & z \neq 0 \\ a & z = 0 \end{cases}$ در $z=0$ پیوسته باشد.

محدود بودن f در $z=0$ حد ندارد. به ازای هیچ مقداری از a پیوسته نخواهد بود.

✓ مشتق پذیری:

فرض کنید تابع f در همسایگی z_0 تعریف شده باشد. مشتق f در z_0 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

در صورت وجود این حد گوئیم تابع f در z_0 مشتق پذیر است.

- قضیه کوشی - ریمان:

فرض کنید برای تابع $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ ، u, v, u_x, u_y, v_x, v_y در $z_0 = (x_0, y_0)$ پیوسته باشند.

مشتقات جزئی مرتبه اول

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

که به معادلات کوشی-ریمان معروفند در نقطه (x_0, y_0) صادق باشند.

آنگاه تابع $f(z)$ در $z_0 = x_0 + i y_0$ مشتق پذیر بوده و مقدار مشتق برابر است با:

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)}$$

مثال ۱: تابع $f(z) = |z|^2$ در چه نقاطی از صفحه مختلط مشتق پذیر است؟

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 + y^2 \\ v(x,y) = 0 \end{cases} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = 0$$

معادلات کوشی-ریمان تنها در مبدأ صدق هستند. چون u, v و مشتقات مرتبه اول آن‌ها در مبدأ پیوسته هستند، بنابراین f در $z=0$ مشتق پذیر بوده و مقدار مشتق برابر است با:

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,0)} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = 0$$

①

مثال ۱: مشتق پذیری تابع $f(z) = \sqrt[3]{xy^2}$ را در مبدأ بررسی کنید.

$$\begin{cases} u(x,y) = \sqrt[3]{xy^2} \\ v(x,y) = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\tan^2 \theta}$$

در $z=0$ دایره‌ای حد نیست. بنابراین در $z=0$ پیوسته نیست و شرط لازم برای مشتق پذیری برقرار نیست.

در نتیجه تابع f در $z=0$ مشتق پذیر نیست و بررسی معادلات کوشی-ریمان برای این تابع در $z=0$ به‌وجود است.

مثال ۲: مشتق پذیری تابع $f(z) = \frac{\bar{z}}{\text{Im}(z^2)}$ را در نقطه $z=1+i$ بررسی کنید و در صورت مشتق پذیر بودن

مقدار مشتق را محاسبه کنید.

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{\text{Im}(z^2)} = \frac{x-iy}{\text{Im}(x^2-y^2+i2xy)} = \frac{x-iy}{2xy} = \frac{1}{2y} + i\frac{-1}{2x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \frac{1}{2y} \\ v(x,y) = -\frac{1}{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} u_x &= 0 = v_y \\ u_y &= -\frac{1}{2y^2} = -v_x = -\frac{1}{2x^2} \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow |x|=|y| \end{aligned}$$

بنابراین تابع f در تمامی نقاطی که در آنجا $|x|=|y|$ باشد مشتق پذیر است. از جمله در $z=1+i$.

$$f'(1+i) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1)} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = i \frac{1}{2x^2} \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2}i$$

- قضیه کوشی-ریمان در مختصات قطبی:

فرض کنید تابع $f(z) = u(r,\theta) + i v(r,\theta)$ در یک همسایگی نقطه $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ تعریف شده باشد. اگر u و v و

مشتقات جزئی مرتبه اول آن‌ها در (r_0, θ_0) پیوسته باشند و اگر این مشتقات جزئی در (r_0, θ_0) در فرم قطبی

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

معادلات کوشی-ریمان معین صدق کنند، آنگاه تابع f در $z_0 = (r_0, \theta_0)$ مشتق پذیر بوده و

$$f'(z_0) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_{(r_0, \theta_0)}$$

مقدار مشتق برابر است با:

مثال ۹: اگر $f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$ و $u(r, \theta) = r^2 \cos \theta - \frac{r}{\theta} \sin \theta$ ،

حاصل $f'(-i)$ مقدار است؟

چون تابع f تحلیلی است بنابراین مشتق نیز برده و در معادلات کسبی-ریمان صدق می کند:

$$z_0 = -i = e^{-i\pi/2} \Rightarrow r_0 = 1, \theta_0 = -\pi/2, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{(r_0, \theta_0)} = e^{-i\theta_0} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_{(r_0, \theta_0)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r \cos \theta + \frac{r}{r^2} \cos \theta \Big|_{(1, -\pi/2)} = -2 \Rightarrow f'(-i) = e^{i\pi/2} (-2 + 2i) = -2 - 2i$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -2r \sin \theta + \frac{r}{r} \sin \theta \Big|_{(1, -\pi/2)} = -2$$

نکته:

اگر تابع مختلط $f(z)$ را بصورت تابعی از z و $\bar{z}$ در نظر بگیریم، آنگاه $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ هم ارز با معادلات کسبی-ریمان است.

بدین معنی که در هر جای صفحه مختلط که مقدار $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ برابر صفر شود، در آن نقاط معادلات کسبی-ریمان نیز صادق هستند.

مثال: تعیین کنید توابع زیر در چه نقاطی از صفحه مختلط مشتق پذیرند.

۱) $f(z) = x^2 + y^2 \rightarrow f(z) = x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Rightarrow z=0 \rightarrow$ معادلات کسبی-ریمان

تنها در مبدأ برقرار است و چون u و v مشتقات نسبی مرتبه اول آن ها در مبدأ پیوسته اند، بنابراین تابع f تنها در مبدأ مشتق پذیر است.

۲) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Rightarrow$ این تابع در تمام نقاط صفحه مختلط به جز $z=0$ پیوسته می باشد و چون

در تمام صفحه مختلط $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ است، بنابراین معادلات کسبی-ریمان در تمام صفحه مختلط صادق است، بنابراین تابع f در تمام نقاط به جز $z=0$

مشتق پذیر است و مشتق آن برابر است با: $f'(z) = \frac{z^2 \cos z - 2z \sin z}{z^4} = \frac{z \cos z - 2 \sin z}{z^3} \quad z \neq 0$

۳) $f(z) = z\bar{z}^3 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 3z\bar{z}^2 = 0 \rightarrow z=0 \rightarrow$

چون u و v مشتقات نسبی مرتبه اول آن ها نسبت به x و y در همه جا پیوسته می باشند، این تابع تنها در $z=0$ مشتق پذیر است.

نکته: توابعی که در ضلعی آن z وجود ندارد، در تمام نقاط صفحه مختلف به جز نقاطی خاص (مثل ریشه های مربع) مشتق پذیر هستند. مثلاً تابع $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ در تمامی نقاط به جز $z = \pm i$ مشتق پذیر است،
 با نقاط نامرئی تابع

✓ توابع تحلیلی

تابع مختلف $f(z)$ را در نقطه z تحلیلی گوئیم اگر حداقل در یک همسایگی z مشتق پذیر باشد.

بنابراین مشتق پذیری f در نقطه z شرط لازم برای تحلیلی بودن f در نقطه z است اما شرط کافی نیست.

مثلاً تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ در برابر صفحه مختلف به جز $z=0$ تحلیلی است. ولی تابع $f(z) = |z|^2$ در هیچ جای صفحه مختلف تحلیلی

نیست، زیرا مشتق آن فقط در $z=0$ موجود است و هیچ همسایگی حول $z=0$ نمی توان یافت که f در برابر آن مشتق پذیر باشد.

تعریف نقطه تکین:

اگر تابع f در نقطه z تحلیلی نباشد اما در هر همسایگی z تحلیلی باشد، در آن صورت z یک نقطه تکین تابع f

مثلاً نقاط تکین تابع $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ نقاط $z = \pm i$ می باشند.

مثال: تابع $f(z) = x^3 + i y^3$ در چه نقاطی مشتق پذیر و در چه نقاطی تحلیلی است؟

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 3 \\ 3y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

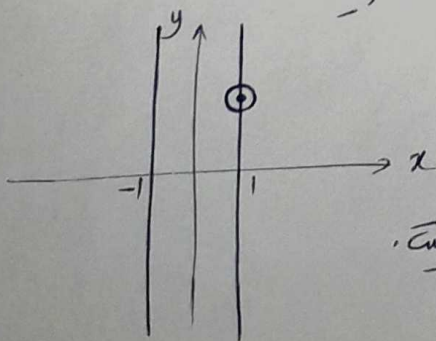
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

بنابراین برای این تابع معادلات کشی ریمان روی خطوط $x = \pm 1$ صادق است و چون u, v و مشتقات نسبی مرتبه اول آن ها در $x = \pm 1$ پیوسته هستند، بنابراین تابع f روی خطوط $x = \pm 1$ مشتق پذیر است.

اما به ازای هر نقطه روی خطوط $x = \pm 1$ هیچ همسایگی

حول آن نقطه نمی توان یافت که f در برابر آن همسایگی

مشتق پذیر باشد. بنابراین این تابع در هیچ جای صفحه مختلف تحلیلی نیست.

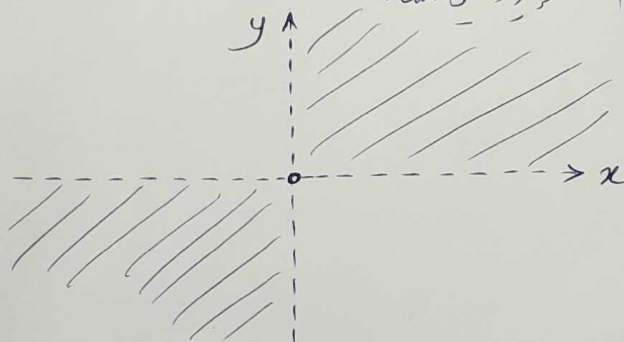


(11)

مثال ۱ تابع $f(z) = x^2 - y^2 + i2|xy|$ در چه نقاط تحلیلی است؟

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \begin{cases} 2x & \text{if } xy > 0 \\ -2x & \text{if } xy < 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \text{شرط اول کسری ریمان در ربع اول و دوم صادق است.}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \begin{cases} 2y & \text{if } xy > 0 \\ -2y & \text{if } xy < 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \text{شرط دوم کسری ریمان نیز در ربع اول و دوم برقرار است.}$$

بنابراین تابع f در ربع اول و دوم مشتق پذیر و تحلیلی است.دقت کنید که تابع f روی محورهای مختصات و مبدأ تحلیلی نیست.

✓ توابع مثلثاتی

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad ; \quad \text{تابع نمایی}$$

$$|e^z| = e^x, \quad \angle e^z = \arg(e^z) = y$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad ; \quad \text{توابع مثلثاتی}$$

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad ; \quad \text{توابع هیپربولیک (هذلولوی)}$$

خواص توابع مثلثاتی:

$$1) \sin(-z) = -\sin z$$

$$2) \cos(-z) = \cos z$$

$$3) \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

$$4) \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$5) \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

(۱۲)

$$a) \sinh(-z) = -\sinh(z)$$

خواص توابع مزدلولی :

$$b) \cosh(-z) = \cosh z$$

$$c) \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_2 \cosh z_1$$

$$d) \cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$e) \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

روابط بین توابع مثلثاتی و مزدلولی :

$$a) \sin iz = i \sinh z$$

$$c) \sinh iz = i \sin z$$

$$b) \cos iz = \cosh z$$

$$d) \cosh iz = \cos z$$

مثال : بسط توابع زیر را بسط آوری.

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sinh z = \sinh(x+iy) = \sinh x \cosh y + i \cosh x \sinh y$$

$$\cosh z = \cosh(x+iy) = \cosh x \cosh y + i \sinh x \sinh y$$

مثال : معادلات زیر را حل کنید.

$$1) \sin z = 0 \Rightarrow \sin(x+iy) = 0 \Rightarrow \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x \cosh y = 0 \\ \cos x \sinh y = 0 \end{cases}$$

چون $\cosh y \geq 1$ است ، معادله اول نتیجه می دهد $\sin x = 0$ و در نتیجه $x = n\pi$. با قرار دادن $x = n\pi$ در معادله دومنتیجه می شود $\sinh y = 0$ و در نتیجه $y = 0$. بنابراین جواب معادله $\sin z = 0$ عبارتست از : $z = x+iy = n\pi$

$$2) \cosh z = 0 \Rightarrow \cosh x \cosh y + i \sinh x \sinh y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cosh x \cosh y = 0 \Rightarrow \cosh y = 0 \Rightarrow y = (n - \frac{1}{2})\pi \\ \sinh x \sinh y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = x+iy = i(n - \frac{1}{2})\pi$$

همین صفرهای $\cosh z$ و $\sinh z$ متناوب برابر $(n - \frac{1}{2})\pi$ و $n\pi i$ می باشد.

(۱۳)

مثال ۱ تابع $f(z) = \frac{z-1}{\cos z \sinh z}$ در چند نقطه داخل ناحیه $|z| = 5$ غیر تحلیلی است؟

نقاط غیر تحلیلی تابع f نقاطی هستند که مخرج در آن نقاط صفر شود:

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = (n - \frac{1}{2})\pi \Rightarrow z = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$$

$$\sinh z = 0 \Rightarrow z = n\pi i \Rightarrow z = 0, \pm \pi i, \dots$$

نکته: توابع نمایی، مثلثاتی و هذلولوی در تمام صفحه مختلط تحلیلی هستند.

- تابع لگاریتم:

در یک تعریف مقدماتی، لگاریتم طبیعی عدد مختلط z را عددی مانند w تعریف می‌کنند اگر $e^w = z$ باشد.

چون $e^{w_0 + i2k\pi} = e^{w_0} = z$ می‌باشد، تمامی اعداد به شکل $w = w_0 + i2k\pi$ برابر با $\ln z$ تعریف می‌شوند. بنابراین با این تعریف

$\ln z$ یک تابع چندبهره‌ای است. به عبارتی با تعریف مقدماتی تابع اساسی تابع نیست.

عموماً تابع $\ln z$ (یعنی تابعی که به هر مقدار z تنها یک مقدار در صفحه w نسبت می‌دهد) به شکل زیر تعریف می‌شود که به آن

شاخه اصلی لگاریتم گویند:

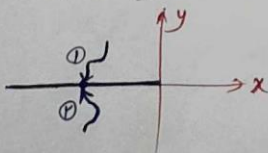
$$\ln z = \ln r e^{i\theta} = \ln r + i\theta \quad ; \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

برای تابع $\ln z$ ، $u(r, \theta) = \ln r$ ، $v(r, \theta) = \theta$. معادلات کوشی ریمان برای این تابع در تمام صفحه مختلط صادق است.

کمتر دقت نشانی می‌دهد که تابع $v(r, \theta) = \theta$ در $\theta = \pi$ (یعنی بخش منفی محور حقیقی) حد ندارد و پیوسته نیست.

بنابراین تابع $\ln z$ در بخش منفی محور حقیقی مشتق‌پذیر و تحلیلی نیست.

$$\begin{cases} \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} v(r, \theta) = \pi \\ \lim_{\theta \rightarrow -\pi^+} v(r, \theta) = -\pi \end{cases}$$

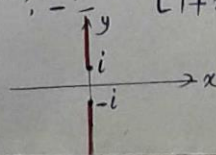


مثال: اگر $\ln z$ شاخه اصلی لگاریتم باشد، تابع $\ln(1+z^2)$ در چه نواحی تحلیلی است؟

$$\ln(1+z^2) = \ln(1+(x+iy)^2) = \ln(1+x^2-y^2+i2xy) \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ 1+x^2-y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{if } x=0 \Rightarrow 1-y^2 \leq 0 \Rightarrow y^2 \geq 1 \Rightarrow |y| \geq 1$$

$$\text{if } y=0 \Rightarrow 1+x^2 \leq 0 \Rightarrow \text{حداثلاً ندارد}$$



(۱۴)

تعریف: نقاط غیر تکلیفی تابع $f(z) = \ln(\sin z)$ را بیابید.

✓ تابع همساز و مزدوج همساز آن:

تعریف: تابع دو متغیره $h(x, y)$ را در ناحیه D از صفحه مختلط تابع همساز توهم هر دو در این ناحیه در معادله لاپلاس صدق کند.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \text{معادله لاپلاس}$$

قضیه: اگر $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ در ناحیه D از صفحه مختلط تحلیلی باشد، آنگاه توابع u و v در این ناحیه همساز می باشند. طبق تعریف $v(x, y)$ را مزدوج همساز $u(x, y)$ می نامیم.مثال: مزدوج همساز تابع $u(x, y) = y(1-2x)$ را بیابید.بیابید $v(x, y)$ را می توانه ای بیابیم که تابع $f(z) = y(1-2x) + i v(x, y)$ تحلیلی باشد. معادلات کسبی را با z عبارتند از:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \Rightarrow v(x, y) = -y^2 + \varphi(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2x - 1 \rightarrow \varphi'(x) = 2x - 1 \Rightarrow \varphi(x) = x^2 - x + C$$

$$\Rightarrow v(x, y) = -y^2 + x^2 - x + C$$

✓ مسیرهای قائم:

اگر $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ تحلیلی باشد، ثابت می شود که خانواده منحنی های $u(x, y) = c$ و $v(x, y) = k$ مسیرهای متعامد یکدیگرند، یعنی زاویه بین دو دسته منحنی در نقطه تلاقی آنها برابر 90° است.مثال: مسیرهای قائم بردسته منحنی $\frac{x}{x^2+y^2} = \lambda$ را بیابید اگر چه ثابت.یعنی با بسته $v(x, y)$ را طور بیابیم که تابع $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i v(x, y)$ تحلیلی باشد.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow v = \int 2xy \left(\frac{x^2 + y^2}{u} \right)^{-2} dx = y \int u^{-2} du$$

$$(18) \Rightarrow v = y(-\frac{1}{u}) + k(y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + k(y) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} + k'(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y-x^2}{(x^2+y^2)^2} + k'(y) \xrightarrow{\text{مقایسه با (1)}} k'(y) = 0 \Rightarrow k(y) = \delta \text{ ثابت}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + \delta = \eta \Rightarrow \boxed{\frac{-y}{x^2+y^2} = \lambda_1}; \lambda_1 = \eta - \delta \text{ ثابت}$$

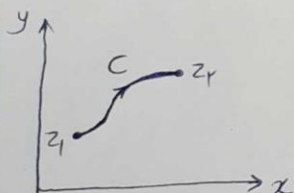
روشن دیگر: بسط $\frac{1}{2}$

تعیین: مسیرهای قائم خانواده منحنی $e^{x \cos y} = k$ ، μ, ν, ω, δ ، $(e^2 \text{ بسط})$

تعیین: مسیرهای قائم خانواده منحنی $\cos x \cos hy = k$ ، μ, ν, ω, δ ، $(\cos 2 \text{ بسط})$

✓ انتگرال گیری از توابع مختلف:

- انتگرال گیری روی مسیر باز:



تابع اولیه $f(z)$ که روی مسیر C کلیتاً ثابت است

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)$$

اگر $f(z)$ تابع اولیه نداشته باشد، انتگرال حتماً باید بصورت پارامتری حل شود.
روشهای پارامتری عبارتند از:

① روش دکارتی: در این روش به جای متغیر z ها قلمبر میدهیم $z = x + i g(x)$ که $g(x)$ مقدار مسیر C بر حسب x است. در اینصورت داریم:

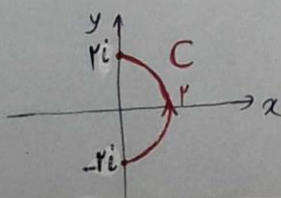
$$dz = d(x + i g(x)) = (1 + i g'(x)) dx$$

② روش قطبی: در این روش قلمبر میدهیم $z = r e^{i\theta}$ و خواهیم داشت:

$$dz = d(r e^{i\theta}) = dr e^{i\theta} + i r e^{i\theta} d\theta = \begin{cases} e^{i\theta} dr & \text{if روی مسیر } C, \theta \text{ ثابت باشد} \\ i r e^{i\theta} d\theta & \text{if روی مسیر } C, r \text{ ثابت باشد} \end{cases}$$

مثال: مقدار انتگرال زیر را بیابید.

$$I = \int_C \bar{z} dz = ?$$



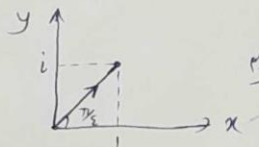
(19)

روی مسیر C داریم: $dz = ir e^{i\theta} d\theta$, $z = r e^{i\theta}$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r e^{-i\theta} (ir e^{i\theta} d\theta) = ri \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi i$$

مثال 1: حاصل انتگرال زیر را بیابید که در آن C خط راستی است که نقطه صفر را به نقطه $1+i$ وصل می‌کند.

$$\int_C |z| dz = ?$$



روی C داریم: $z = r e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow dz = e^{i\frac{\pi}{4}} dr$

$$\int_C |z| dz = \int_0^{\sqrt{2}} r e^{i\frac{\pi}{4}} dr = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$$

- انتگرالی روی مسیر بسته:

قضیه کوشی - گورس:

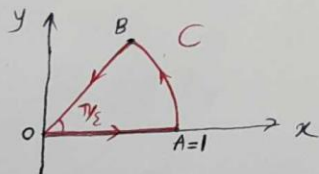
اگر تابع f در همه نقاط درون و روی مسیر ساده بسته C تحلیلی باشد، آنگاه:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

نکته: اگر تابع f تحلیلی نباشد، باید انتگرال بصورت پارامتری حل شود.

مثال: حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\oint_C \bar{z} dz = ?$$



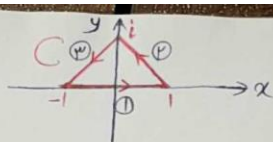
$$\oint_C \bar{z} dz = \int_{OA} \bar{z} dz + \int_{AB} \bar{z} dz + \int_{BO} \bar{z} dz = \frac{1}{2} + i\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = i\frac{\pi}{4}$$

روی OA مسیر: $z = x \Rightarrow dz = dx \Rightarrow \int_{OA} \bar{z} dz = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$

روی AB مسیر: $z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow \int_{AB} \bar{z} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i\theta} \cdot ie^{i\theta} d\theta = i\frac{\pi}{4}$

روی BO مسیر: $z = re^{i\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow dz = e^{i\frac{3\pi}{2}} dr \Rightarrow \int_{BO} \bar{z} dz = \int_1^0 re^{-i\frac{3\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} dr = \frac{1}{2} r^2 \Big|_1^0 = -\frac{1}{2}$

(14) $\oint_C \operatorname{Re}(z) dz = ?$



حل المسألة: حاصل التفاضل زیر با هم

$$\oint_C \operatorname{Re}(z) dz = \oint_C \frac{1}{r} (z + \bar{z}) dz = \underbrace{\oint_C \frac{1}{r} z dz}_{=0} + \oint_C \frac{1}{r} \bar{z} dz = \frac{1}{r} \oint_C \bar{z} dz$$

(I) $z = x, \bar{z} = x, dz = dx \Rightarrow \int_{-1}^1 \bar{z} dz = \int_{-1}^1 x dx = 0$

(II) $y = 1-x \Rightarrow z = x+iy = x+i(1-x) \Rightarrow dz = dx - i dx = (1-i)dx$

$$\int_{\text{II}} \bar{z} dz = \int_1^0 (x-i(1-x))(1-i) dx = (1-i) \left[\int_1^0 x dx - i \int_1^0 (1-x) dx \right] =$$

(II) $(1-i) \left[-\frac{1}{2} - i(-\frac{1}{2}) \right] = -\frac{1}{2}(1-i)^2 = i$

(III) $y = 1+x \Rightarrow z = x+iy = x+i(1+x) \Rightarrow dz = (1+i)dx$

$$\int_{\text{III}} \bar{z} dz = \int_0^{-1} (x-i(1+x))(1+i) dx = (1+i) \left[\int_0^{-1} x dx - i \int_0^{-1} (1+x) dx \right] =$$

(III) $(1+i) \left[\frac{1}{2} - i(-\frac{1}{2}) \right] = \frac{1}{2}(1+i)^2 = i$

$$\Rightarrow \oint_C \operatorname{Re}(z) dz = \frac{1}{r} \oint_C \bar{z} dz = \frac{1}{r} \left[\int_{\text{I}} \bar{z} dz + \int_{\text{II}} \bar{z} dz + \int_{\text{III}} \bar{z} dz \right] = \frac{1}{r} (0+i+i) = i$$

(۱۸)

فصل دوم: سری های متناهی

بیشتر تعاریف و قضایای مربوط به سری های حقیقی در مورد سری های متناهی نیز صادق است. سری زیر را در نظر بگیرید:

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$$

گفته می شود این سری در ناحیه ای صحت R در صفحه متناهی به مجموع $S(z)$ همگراست اگر به ازای هر z متعلق به R داشته باشیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$$

ناحیه همگرایی این سری مجموعه همه مقادیر z از صفحه متناهی است که به ازای آن ها سری همگرا شود.

قضیه (آزمون نسبت): برای سری توان $f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$ تعریف می کنیم:

$$|r(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right|$$

در این صورت، سری مفروض برای مقادیر z که در $|r(z)| < 1$ صدق کند، همگرا بوده و به ازای $|r(z)| > 1$ واگراست. مقادیر z که به ازای آن ها $|r(z)| = 1$ شود، مرز ناحیه همگرایی بوده و آزمون نسبت اطلاعاتی درباره همگرایی و واگرایی سری نمی دهد.

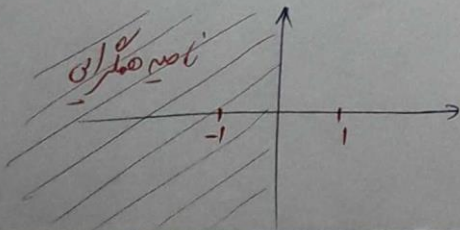
مثال: ناحیه همگرایی سری توان زیر را بیابیم.

$$1 + \frac{1}{2^2} \frac{z+1}{z-1} + \frac{1}{3^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 + \dots$$

حل: $f_n(z) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{n-1} \Rightarrow |r(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n}{\frac{1}{n^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{n-1}} \right| = \left| \frac{z+1}{z-1} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left| \frac{z+1}{z-1} \right|$

$$\Rightarrow |r(z)| < 1 \Rightarrow \left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 1 \Rightarrow |z+1| < |z-1| \rightarrow z \text{ باید سمت چپ عمود منصف پاره خط باشد}$$

که نقاط -1 و 1 را هم وصل می کند. یعنی در ناحیه $x < 0$

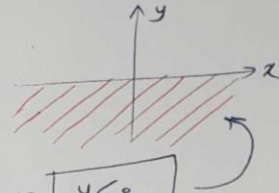


(19)

محل: ناحیه هاله سری $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i(\frac{n}{2+1})}$

$$|r(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{i(\frac{n+1}{2+1})}}{e^{i(\frac{n}{2+1})}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| e^{\frac{i}{2+1}} \right| = \left| e^{\frac{i}{2+1}} \right| = \left| e^{\frac{i}{2+1+iy}} \right|$$

$$\left| e^{\frac{i(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}} \right| = \left| e^{\frac{y+i(x+1)}{(x+1)^2+y^2}} \right| = e^{\frac{y}{(x+1)^2+y^2}}$$

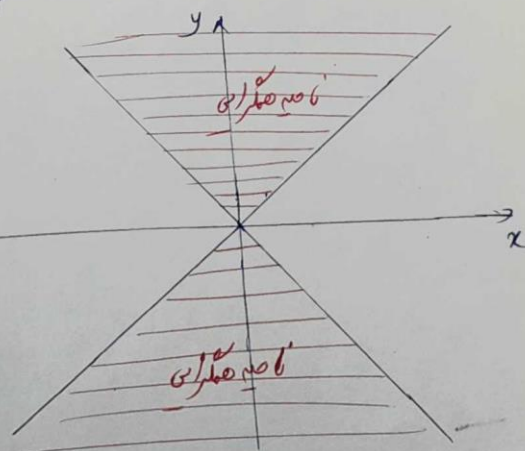


$$|r(z)| < 1 \Rightarrow e^{\frac{y}{(x+1)^2+y^2}} < 1 \Rightarrow \frac{y}{(x+1)^2+y^2} < 0 \Rightarrow \boxed{y < 0}$$

محل: ناحیه هاله سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{n}{z^2}}$

$$|r(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2} e^{\frac{n+1}{z^2}}}{\frac{1}{n^2} e^{\frac{n}{z^2}}} \right| = \left| e^{\frac{1}{z^2}} \right| = \left| e^{\frac{(x^2-y^2)-i2xy}{(x^2-y^2)^2+\epsilon x^2 y^2}} \right|$$

$$e^{\frac{x^2-y^2}{(x^2-y^2)^2+\epsilon x^2 y^2}} < 1 \Rightarrow \frac{x^2-y^2}{(x^2-y^2)^2+\epsilon x^2 y^2} < 0 \Rightarrow x^2-y^2 < 0 \Rightarrow x^2 < y^2 \Rightarrow |x| < |y|$$



(۲۰)

✓ سری تیلور

اگر f در سراسر ناحیه D از صفحه مختلط تحلیلی بوده و z_0 نقطه‌ای در D باشد، نمایش سری تیلور تابع f حول z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad ; \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{بصورت زیر است:}$$

نامیه هیلری سری تیلور تابع f در نقطه‌ای z_0 برابر است با:

$$|r(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (z-z_0)^{n+1}}{a_n (z-z_0)^n} \right| = |z-z_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow |z-z_0| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

$$\Rightarrow |z-z_0| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \Rightarrow \text{نابرابر نامیه هیلری سری تیلور } f \text{ در } z_0, \text{ دایره‌ای به مرکز } z_0 \text{ و شعاع } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ می‌باشد.}$$

شعاع هیلری

مثال: سری تیلور تابع $f(z) = \frac{1}{1-z}$ را بیابیم.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} z + \frac{f''(z_0)}{2!} z^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!} z^3 + \dots = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

شعاع هیلری عبارتست از:

$$f(z_0) = 1$$

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \Rightarrow f'(z_0) = 1$$

$$f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3} \Rightarrow f''(z_0) = 2 = 2!$$

$$f'''(z) = \frac{6}{(1-z)^4} \Rightarrow f'''(z_0) = 6 = 3!$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots ; |z| < 1}$$

$$f^{(n)}(z_0) = n! \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

نکته: به سری تیلور تابع f حول $z_0 = 0$ ، سری مکلاورن تابع f گفته می‌شود.

۲۱

مثال ۱: سری تیلور تابع $f(z) = \sinh z$ را در $z=0$ بساز.

$$f(z) = \sinh z \Rightarrow f'(z) = \cosh z \Rightarrow f'(0) = 1, f''(z) = \sinh z \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(z) = \cosh z \Rightarrow f'''(0) = 1, \dots$$

$$\Rightarrow \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = 0 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \dots = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n+3)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(2n+3)(2n+2)| = \infty$$

نمونه: سری تیلور تابع $e^z, \sin z, \cosh z, \sinh z$ را در $z=0$ بساز.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \forall z \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \forall z$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \forall z$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \forall z$$

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}; |z| < 1$$

نمونه: سری تیلور تابع $f(z) = \tan^{-1} z$ را در $z=0$ بساز.

مثال ۲: سری تیلور تابع زیر را در $z=0$ بساز.

$$1) f(z) = \frac{1}{1+z}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\dots; |z| < 1 \xrightarrow{z \rightarrow -z} \frac{1}{1+z} = 1-z+z^2-z^3+\dots; |z| < 1$$

$$2) f(z) = \frac{z^3}{z^2+1}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = 1-z^2+z^4-z^6+\dots \Rightarrow \frac{z^3}{1+z^2} = z^3 - z^5 + z^7 - \dots; |z| < 1$$

$$3) f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$$

$$\frac{z}{(z-1)(z+2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2} = \frac{\frac{1}{3}}{z-1} + \frac{\frac{-2}{3}}{z+2} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-z} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1+\frac{z}{2}} \right) =$$

$$A = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2)f(z) = \frac{-2}{3}$$

$$-\frac{1}{3} (1+z+z^2+\dots) + \frac{2}{3} (1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\dots) = -\frac{1}{3} z - \frac{1}{3} z^2 - \frac{2}{3} z^3 - \dots; |z| < 1 \quad (|z| < 1) \cap (|z| < 2)$$

(۲۲)

$$۱) f(z) = z \sin z^r$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \Rightarrow \sin z^r = z^r - \frac{z^{3r}}{3!} + \frac{z^{5r}}{5!} - \dots \Rightarrow$$

$$z \sin z^r = z^r - \frac{z^{4r}}{3!} + \frac{z^{6r}}{5!} - \dots$$

$$۲) f(z) = z e^{-z}$$

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \Rightarrow z e^{-z} = z - z^2 + \frac{z^3}{2!} - \frac{z^4}{3!} + \dots$$

مثال: سری تیلور تابع زیر را در نقاط خواسته شده بسازید و رسم کنید.

$$z_0 = 1, f(z) = \frac{1}{z} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots; |z-1| < 1$$

$$z_0 = i, f(z) = \frac{1}{1-z} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{\frac{1}{1-i}}{1 - \frac{z-i}{1-i}} = \frac{1}{1-i} \left(1 + \frac{z-i}{1-i} + \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^2 + \dots \right); \left| \frac{z-i}{1-i} \right| < 1$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i} + \frac{z-i}{(1-i)^2} + \frac{(z-i)^2}{(1-i)^3} + \dots; |z-i| < \sqrt{2}$$

$$z_0 = -1, f(z) = \frac{1}{z^2+1} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{-\frac{i}{2}}{z-i} + \frac{\frac{i}{2}}{z+i} =$$

$$A = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$$

$$B = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) f(z) = \frac{-1}{2i} = \frac{i}{2}$$

$$\frac{-\frac{i}{2}}{-1-i+(z+i)} + \frac{\frac{i}{2}}{-1+i+(z+i)} =$$

$$-\frac{i}{2} \left(\frac{\frac{1}{1-i}}{1 + \frac{z+i}{-1-i}} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\frac{1}{1+i}}{1 + \frac{z+i}{-1+i}} \right) =$$

$$\frac{i}{2(1+i)} \left(1 + \left(\frac{z+i}{1+i} \right) + \left(\frac{z+i}{1+i} \right)^2 + \dots \right) + \frac{i}{2(1-i)} \left(1 - \left(\frac{z+i}{i-1} \right) + \left(\frac{z+i}{i-1} \right)^2 - \dots \right) =$$

$$\frac{1}{2}(1+i)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(z+i) + \frac{1}{2}(z+i)^2 + \dots; \left| \frac{z+i}{1-i} \right| < 1 \cap \left| \frac{z+i}{-1+i} \right| < 1 = |z+i| < \sqrt{2}$$

(۲۳)

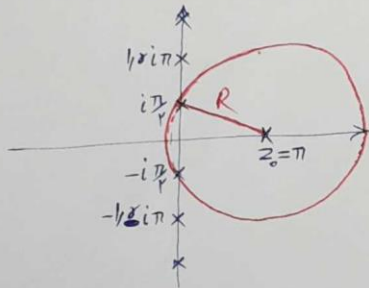
تمرین ۱ سری تیلور تابع $f(z) = ze^z$ را در $z_0 = 1$ بدست آوریم.

نکته: فرض کنید f تابعی مختلط باشد که در z_0 تحلیلی است. شعاع همگرایی سری تیلور تابع f در z_0 برابر است با مینیمم فاصله z_0 تا تمام نقاط غیر تحلیلی f .

مثال: شعاع همگرایی سری تیلور تابع زیر را حول نقاط داده شده بدست آوریم.

$$f(z) = \frac{1}{\cosh z}, \quad z_0 = \pi \quad (1)$$

$$\cosh z = 0 \Rightarrow z = (n - \frac{1}{2})\pi i$$

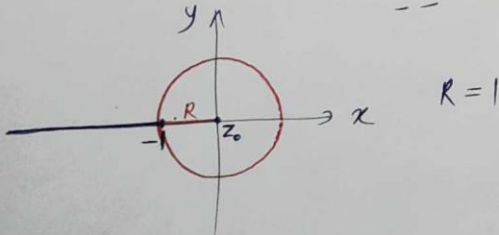


$$R = |z_0 - i\frac{\pi}{2}| = |\pi - i\frac{\pi}{2}| = \sqrt{\pi^2 + \frac{\pi^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi$$

$$f(z) = \ln(1+z), \quad z_0 = 0 \quad (2)$$

شعاع اصلی

$$\ln(1+z) = \ln(1+x+iy) \xrightarrow{\text{نقاط غیر تحلیلی}} \begin{cases} y=0 \\ 1+x \leq 0 \Rightarrow x \leq -1 \end{cases}$$

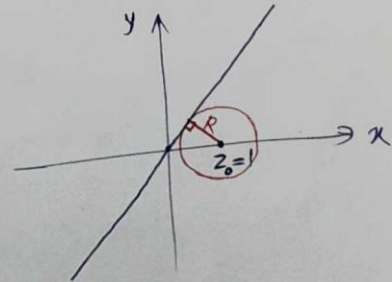


$$f(z) = \ln iz^r, \quad z_0 = 1 \quad (3)$$

شعاع اصلی

$$\ln iz^r = \ln i(x^r - y^r + ixy) = \ln(-rxy + i(x^r - y^r))$$

$$\begin{cases} x^r - y^r = 0 \Rightarrow x^r = y^r \Rightarrow |x| = |y| \\ -rxy \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

✓ سری لوران

اگر تابع f در z_0 تحلیلی نباشد، نمی‌توان برای تابع f حول نقطه z_0 بسط تیلور یافت. در این حالت برای تابع f سری لوران را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف لوران :

اگر f تابعی مختلط بوده که در سراسر ناحیه $R_1 < |z - z_0| < R_2$ تحلیلی باشد و C معروف مسیر ساده بسته‌ای در محیط مثبت حول z_0 و واقع در این حوزه باشد، آنگاه در هر نقطه‌ای z از آن حوزه، $f(z)$ دارای نمایش سری زیر است:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad R_1 < |z - z_0| < R_2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz \quad n=1, 2, 3, \dots$$

نکته: برای بدست آوردن سری لوران یک تابع حول z_0 ، از روابط انتگرالی بالا استفاده نمی‌کنیم. می‌توان با استفاده از سری تیلور، بسط لوران f را بدست آورد.

مثال: سری لوران توابع زیر را در نقاط داده شده محاسبه کنید.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}, z=0 \quad (1)$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots; |z| > 0$$

$$f(z) = \sin \frac{1}{z-1}, z=1 \quad (2)$$

$$\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^5} - \dots; |z-1| > 0$$

$$f(z) = z \sin \frac{1}{z-1}, z=1 \quad (3)$$

$$z \sin \frac{1}{z-1} = (z-1+1) \sin \frac{1}{z-1} = (z-1) \sin \frac{1}{z-1} + \sin \frac{1}{z-1} =$$

$$(z-1) \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^5} - \dots \right) + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \frac{1}{5!(z-1)^5} - \dots = 1 + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^2} - \frac{1}{3!z(z-1)^3} + \dots$$

(با $|z-1| > 0$)

نکته: اگر تابع f در z_0 تحلیلی نباشد، آنگاه حول این نقطه دارای بسط تیلور بوده و این بسط یکتا نیز نباشد. (۲۵)

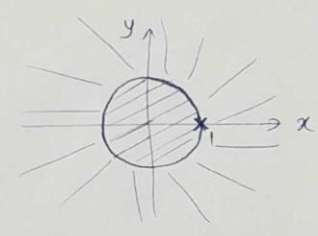
خفاقی f در z_0 تحلیلی نباشد، حول z_0 دارای بسط لوران بوده و ممکن است بیش از یک بسط داشته باشد. تعداد بسط لوران تابع f در z_0 به تعداد ناصیه همگرایی در صفحه مختلا بستگی دارد که مرکز نواحی همگرایی را نقاط-کلین (غیر تحلیلی) تابع f مشخص میکند.

مثال: بسط های لوران تابع زیر را بیابید. (حول مبدأ)

اثر ناصیه همگرایی $|z| < 1$ باشد:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad |z| < 1$$

اثر ناصیه همگرایی $|z| > 1$ باشد:

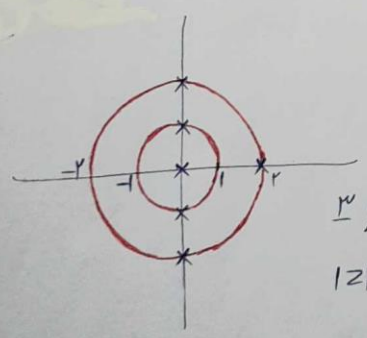


$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z} - 1} = -\frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \right) = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) =$$

$$-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots \quad \left| \frac{1}{z} \right| < 1$$

مثال: تعداد سری های ممکن برای تابع $f(z) = \frac{z+1}{z(z^2+1)(z-2)(z^2+4)}$ را حول نقاط $z_0=0$ و $z_0=-1$ بیابید.



نقاط-کلین تابع f عبارتند از: $0, \pm i, \pm 2$

به روش هندسی با توجه به شکل رو برو، تعداد سری های لوران حول $z_0=0$ به برابر ۳ است. ناصیه همگرایی این سه سری عبارتند از: $0 < |z| < 1$ ، $1 < |z| < 2$ و $|z| > 2$

تعداد سری لوران حول $z_0=-1$ برابر ۵ است با نواحی همگرایی:

$$0 < |z+1| < \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} < |z+1| < \sqrt{8}, \quad \sqrt{8} < |z+1| < 3, \quad |z+1| > 3$$

به همین ترتیب ۵ سری لوران حول $z_0=i$ با نواحی همگرایی زیر داریم:

$$0 < |z-i| < 1, \quad 1 < |z-i| < \sqrt{8}, \quad 2 < |z-i| < 3, \quad \sqrt{8} < |z-i| < 3, \quad |z-i| > 3$$

(۴۴)

مثال، سری لوران توابع زیر را حول نقطه مذکور و ناحیه همگرایی را (در صورتی که باشد) آورید.

۱) $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z_0 = 1$, $|z-1| > 0$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z-1} \Rightarrow b_1 = -1$$

خود ضابطه f ، بسط لوران حول $z_0 = 1$ است.

۲) $f(z) = \frac{1}{z-2}$, $z_0 = 0$, $|z| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}} = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \dots \right), \quad \left|\frac{2}{z}\right| < 1 \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \frac{2^3}{z^4} + \dots, \quad |z| > 2$$

۳) $f(z) = \frac{z+2}{z(z-2)}$, $z_0 = 0$, $0 < |z| < 2$

$$f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} = \frac{-1}{z} + \frac{2}{z-2} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{z} - \left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \dots \right)$$

$$= -\frac{1}{z} - 1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} - \dots, \quad 0 < |z| < 2$$

۴) $f(z) = \frac{z+2}{z(z-2)}$, $z_0 = 0$, $|z| > 2 \rightarrow$ مسابه مثال قبل اما ناحیه همگرایی متفاوت

$$f(z) = \frac{-1}{z} + \frac{2}{z-2} = -\frac{1}{z} + \frac{2}{z-2} = -\frac{1}{z} + \frac{2}{z} \left(1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \dots \right), \quad \left|\frac{2}{z}\right| < 1$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \dots, \quad |z| > 2$$

۵) $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$, $z_0 = i$, $1 < |z-i| < 2$

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + \frac{-\frac{1}{z}}{z-i} + \frac{-\frac{1}{z}}{z+i} = \frac{1}{i+(z-i)} + \frac{-\frac{1}{z}}{z-i} + \frac{-\frac{1}{z}}{zi+(z-i)} =$$

$$\frac{\frac{1}{z-i}}{1+\frac{i}{z-i}} + \frac{-\frac{1}{z}}{z-i} + \frac{\frac{i}{z}}{1+\frac{z-i}{zi}} =$$

$$\frac{1}{z-i} \left(1 - \frac{i}{z-i} + \left(\frac{i}{z-i}\right)^2 - \left(\frac{i}{z-i}\right)^3 + \dots \right) + \frac{-\frac{1}{z}}{z-i} + \frac{i}{z} \left(1 - \frac{z-i}{zi} + \left(\frac{z-i}{zi}\right)^2 - \dots \right)$$

$\left|\frac{i}{z-i}\right| < 1 \Rightarrow |z-i| > 1$

$\left|\frac{z-i}{zi}\right| < 1 \Rightarrow |z-i| < 2$

$$= \dots - \frac{1}{(z-i)^3} - \frac{i}{(z-i)^2} + \frac{1}{z-i} + \frac{i}{z} - \frac{1}{z} (z-i) - \frac{i}{19} (z-i)^2 + \dots, \quad 1 < |z-i| < 2$$

(۲۷)

فصل سوم: مانده ها و کاربردهای آن

تعریف نقطه کلین:

نقطه z_0 یک نقطه کلین تابع f نامیده می شود هرگاه f در z_0 کلین نباشد اما در هر همسایگی z_0 نقاطی باشد که f در آنها کلین است.

تعریف مانده:

فرض کنید z_0 یک نقطه کلین تابع f باشد. در این صورت عدد مثبتی R موجود است به قسمی که تابع f در هر نقطه ناحیه $0 < |z - z_0| < R$ کلین است. در این حالت می توان بسط لوران تابع f حول z_0 به نام همگرایی $0 < |z - z_0| < R$ به صورت زیر نمایش داد:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots$$

طبق تعریف ضرب $\frac{1}{z - z_0}$ در بسط فوق یعنی b_1 ، مانده تابع f در $z = z_0$ نامیده می شود.نکته: خنثی تابع f در $z = z_0$ کلین باشد، بسط لوران آن حول z_0 به بسط تیلور تبدیل شده و خواهیم داشت $b_1 = 0$.

مثال: مانده توابع زیر را در نقاط داده شده بدست آوریم.

$$z=1 \text{ در } f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2} \quad (a)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots, \quad |z-1| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} (1 - (z-1) + (z-1)^2 - \dots) = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + 1 - (z-1) + \dots$$

مانده تابع f در $z=1$ برابر با -1 می باشد.

$$z=0 \text{ در } f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} + z^2 \sin \frac{z}{2} \quad (b)$$

$$f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} + z^2 \sin \frac{z}{2} = \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2! z^4} + \dots\right) + z^2 \left(\frac{z}{2} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - \dots\right) \Rightarrow$$

$$\text{مانده } b_1 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

(۲۸)

✓ انواع نقاط تکین :

(۱) اگر $f(z)$ تعریف نشده باشد و $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ برابر با عدد معلوم شود، آنگاه z_0 یک نقطه تکین برداشتی تابع f است.

مانده در نقاط تکین برداشتی برابر با صفر است. مانند نقطه $z=0$ برای تابع $f(z) = \frac{z \cos z}{\sin z}$

(۲) اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ وجود نداشته باشد، آنگاه z_0 نقطه تکین اساسی تابع f است. مانند نقطه $z=0$ برای تابع

$$f(z) = \sin \frac{1}{z} \quad \text{و} \quad e^{\frac{1}{z}}$$

برای یافتن مانده در نقاط تکین اساسی از بسط لوران استفاده می‌کنیم.

(۳) اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ شود، نقطه z_0 قطب تابع f نامیده می‌شود.

برای تعیین مانده در قطب ابتدا باید مرتبه قطب را مشخص دهیم.

- طبق تعریف $z=z_0$ قطب مرتبه m تابع f است هرگاه $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^m f(z)$ برابر با عددی متناهی و غیر صفر شود.

نکته: در حالت کلی اگر تابع f بصورت $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ باشد که توابع p, q در z_0 تحلیل باشند، خفایه z_0

صفر مرتبه m ام $p(z)$ و صفر مرتبه n ام $q(z)$ باشد $(m, n \geq 1)$ ، آنگاه:

(I) اگر $n > m$ باشد، z_0 قطب مرتبه $n-m$ ام $f(z)$ است.

(II) اگر $n = m$ باشد، z_0 نقطه تکین برداشتی $f(z)$ می‌باشد.

(III) اگر $m > n$ باشد، z_0 صفر مرتبه $m-n$ ام $f(z)$ می‌باشد.

مثال: مرتبه صفر یا قطب توابع زیر را در نقاط داده شده بدست آوریم.

$$(1) \quad f(z) = \frac{z+1}{z^4(z-1)} \quad \text{در } z=0 \quad \Leftarrow m=0, n=4 \Leftarrow z=0 \text{ قطب مرتبه } 4$$

$$(2) \quad f(z) = \frac{\sin z^2}{z^8} \quad \text{در } z=0 \quad \Leftarrow m=2, n=8 \Leftarrow z=0 \text{ قطب مرتبه } 6$$

$$(3) \quad f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z-2)^2} \quad \text{در } z=2 \quad \Leftarrow m=1, n=2 \Leftarrow z=2 \text{ قطب مرتبه اول (قطب ساده)}$$

$$(4) \quad f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^4 \cos^2 z} \quad \text{در } z=0 \quad \Leftarrow m=4, n=2 \Leftarrow z=0 \text{ صفر مرتبه } 2$$

$$(5) \quad f(z) = \frac{1-\cos z}{z} \quad \text{در } z=0 \quad \Leftarrow \text{شفاف است} \quad z=0 \text{ صفر مرتبه چند؟ } 1-\cos z \text{ است، بصورت مستقیم سخت است، لذا بنویسیم}$$

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z} = \frac{z^2/2}{z} = \frac{z}{2} \Rightarrow z=0 \text{ صفر ساده است، داریم!}$$

(۲۹)

✓ مانده در قطب مرتبه m اگر نقطه z_0 قطب مرتبه m تابع $f(z)$ باشد، مانده تابع f در z_0 برابر است با:

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-z_0)^m f(z))$$

با استفاده از فرمول بالا، مانده در قطب مرتبه اول (قطب ساده) برابر است با:

$$\text{قطب ساده} \rightarrow b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z)$$

$$\text{قطب مرتبه ۲} \rightarrow b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} ((z-z_0)^2 f(z))$$

$$\text{قطب مرتبه ۳} \rightarrow b_1 = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^2}{dz^2} ((z-z_0)^3 f(z))$$

در حالتی که z_0 قطب ساده f باشد، برای بدست آوردن مانده می‌توان از روش زیر استفاده کرد. فرض کنیم $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ بوده و توابع p و q در z_0 تحلیل باشند. همچنین فرض کنیم $p(z_0) \neq 0$ ، $q(z_0) = 0$ ، $q'(z_0) \neq 0$ (این شرایط بیان می‌کند که z_0 قطب ساده f است). در این صورت داریم:

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z)-q(z_0)}{z-z_0}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{q'(z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \Rightarrow$$

$$\boxed{b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$$

برای محاسبه مانده در قطب ساده می‌توان از فرمول اخیر و رابطه اصلی استفاده کرد. بصورت تجربی می‌توان گفت زمانی که مخرج $f(z)$ (یعنی $q(z)$) چند جمله‌ای نیست، استفاده از رابطه اخیر مناسب‌تر است.

۳۰

مثال ۱: مایه تعریف زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

$$۱) f(z) = \frac{z^r + \varepsilon}{z^r(z-1)}, \quad z_0 = 1 \Rightarrow b_1 = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \varepsilon$$

$$۲) f(z) = \frac{z+1}{\sinh \pi z}, \quad z_0 = 0 \Rightarrow b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{z+1}{\pi \cosh \pi z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\pi}$$

$$۳) f(z) = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad z_0 = -\pi i \Rightarrow b_1 = \frac{\cosh z}{\cosh z} \Big|_{z=-\pi i} = \frac{\cosh(-\pi i)}{\cosh(-\pi i)} = \frac{\cosh \pi}{\cosh \pi} = 1$$

$$۴) f(z) = \frac{1}{(z+i)^r}, \quad z_0 = -i \Rightarrow \text{نقطه بحرانی} \Rightarrow b_1 = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} ((z+i)^r f(z)) =$$

$$\lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} ((z+i)^r \times \frac{1}{(z+i)^r(z-i)^r}) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z-i)^r} \right) = \frac{-r}{(z-i)^{r+1}} \Big|_{z=-i} = \frac{-r}{\varepsilon^r}$$

$$۵) f(z) = \left(\frac{z}{z+1} \right)^r, \quad z_0 = -\frac{1}{r} \Rightarrow \text{نقطه بحرانی} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{r} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{r}} \frac{d}{dz} \left((z+\frac{1}{r})^r f(z) \right) =$$

$$\frac{1}{r} \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{r}} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^r}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{r} \times \frac{r}{\varepsilon} \times \left(-\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2}$$

$$۶) f(z) = \frac{e^z \sinh z}{(z^r + \pi^r)^r}, \quad z_0 = \pi i \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=r \end{cases} \Rightarrow n-m=1 \Rightarrow \text{نقطه ساده} \Rightarrow$$

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow \pi i} (z-\pi i) f(z) = \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{(z-\pi i) e^z \sinh z}{(z-\pi i)^r (z+\pi i)^r} = \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{e^z \sinh z}{(z-\pi i)^{r-1} (z+\pi i)^r} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t+\pi i} \sinh(t+\pi i)}{t(t+\pi i)^r} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\pi i} (\sinh t \cosh \pi + \cosh t \sinh \pi)}{t(t+\pi i)^r} = \frac{\sinh t}{t(t+\pi i)^r} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{(t+\pi i)^r}$$

$$\Rightarrow b_1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(t+\pi i)^r} = -\frac{1}{r\pi^r}$$

$$۷) f(z) = z e^{\frac{1}{z+r}}, \quad z_0 = -r \Rightarrow \text{نقطه بحرانی}$$

$$f(z) = (z+r-r) e^{\frac{1}{z+r}} = (z+r) e^{\frac{1}{z+r}} - r e^{\frac{1}{z+r}} = (z+r) \left(1 + \frac{1}{z+r} + \frac{1}{2!(z+r)^2} + \dots \right)$$

$$-r \left(1 + \frac{1}{z+r} + \frac{1}{2!(z+r)^2} + \dots \right) \Rightarrow b_1 = \frac{1}{r} - r = -\frac{1}{r}$$

$$1) f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}, z_0 = 0$$

(11)

$$f(z) = \left(-\frac{1}{1-z}\right) e^{\frac{1}{z}} = -(1+z+z^2+z^3+\dots)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots\right) \Rightarrow$$

$$b_1 = -(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots) = -(e-1) = 1-e$$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \Rightarrow e = 1 + 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$9) f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}, z_0 = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \text{simple pole} \Rightarrow b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{1}{-\frac{1}{z^2} \cos \frac{1}{z}} \Big|_{z_0 = \frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\pi^2}$$

$$10) f(z) = \frac{1}{1-\cos z}, z_0 = 0 \Rightarrow \text{pole of order } r \Rightarrow q(0)=0, q'(0)=0, q''(0) \neq 0$$

$$\Rightarrow b_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^r}{1-\cos z} \right) =$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^r}{1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^r}{\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots} \right)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{rz}{2!} - \frac{rz^3}{4!} + \dots}{\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots\right)^2} = 0$$

$$11) f(z) = z^r \cos \frac{1}{z-1}, z_0 = 1$$

$$f(z) = (z-1+1)^r \cos \frac{1}{z-1} =$$

$$\left((z-1)^r + r(z-1)^{r-1} + \dots\right) \left(1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} - \dots\right) \Rightarrow$$

$$b_1 = -1$$

✓ کاربرد مانده ها در حل انتگرال های مختلط

قضیه اصلی مانده ها :

فرض کنید C مسیر بسته و بسته ای در جهت مثبت (مضرب) باشد. اگر تابع f در درون خم C به جز در تعدادی

مناقصه نقطه تکیه z_k تحلیلی باشد، آنگاه :

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

مثال : حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

۱) $A = \oint_C \frac{z-3}{z(z-1)} dz = ?$ $C: |z|=2$ دایره در جهت مثبت

این تابع دو نقطه تکیه $z=0$ و $z=1$ دارد که هر دو در درون خم C قرار دارند. بنابراین :

$$A = 2\pi i (\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1} f(z)) = 2\pi i (3+1) = 10\pi i$$

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 3$$

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f(z) = 2$$

۲) $B = \oint_C z \sin \frac{1}{z+2} dz$, $C: |z|=3$ دایره در جهت مثبت

$$f(z) = z \sin \frac{1}{z+2} = (z+2-2) \left(\frac{1}{z+2} + \frac{1}{3!(z+2)^3} + \frac{1}{5!(z+2)^5} + \dots \right), |z+2| > 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=-2} f(z) = -2 \Rightarrow B = 2\pi i (-2) = -4\pi i$$

۳) $C = \oint_C \frac{z}{\sin z} dz$, $C: |z|=1$ دایره در جهت مثبت

تابع f در داخل دایره $|z|=1$ تنها دارای یک نقطه تکیه $z=0$ است. چون $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1$ ، بنابراین $z=0$ یک نقطه تکیه برداشتنی بوده و مانده f در آن صفر خواهد بود. در نتیجه :

$$C = 2\pi i (\operatorname{Res}_{z=0} f(z)) = 0$$

اگر تعداد نقاط تکیه تابع f در داخل مسیر C زیاد باشد، باید مانده یک یک نقاط را حساب شود که این امر باعث طولانی شدن حساب با استفاده از قضیه اصلی مانده ها می شود. دقت کنید که برای حل انتگرال نیاز داریم که مجموع مانده های f در همدی نقاط تکیه آن را بدانیم. قضیه زیر موسوم به قضیه فرعی مانده ها به این موضوع خواهد پرداخت.

۳۳

✓ قضیه فرعی مانده ها :

فرض کنیم C مسیر بسته بسته در جهت مثبت باشد، اگر تابع f در همه جا به جز در تعدادی متناهی نقطه تکین واقع در داخل C ، تحلیلی باشد آن گاه :

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^r} f\left(\frac{1}{z}\right) \right)$$

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^r} f\left(\frac{1}{z}\right) \right) ;$$

مثال : حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

$$1) A = \oint_{|z|=r} \frac{(z^2+1) \sin(\frac{1}{z})}{(z^2-1)(z^2+3)} dz$$

تابع f دارای ∞ نقطه تکین می باشد که عبارتند از : $0, \pm i, \pm 1, \pm \sqrt{3}i$ که همگی داخل دایره $|z|=r$ می باشند.

$$f(z) = \frac{(z^2+1) \sinh \frac{1}{z}}{(z^2-1)(z^2+3)} \Rightarrow z^r f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^r} \times \frac{(\frac{1}{z^2}+1) \sin z}{(\frac{1}{z^2}-1)(\frac{1}{z^2}+3)} = \frac{(1+z^2) \sin z}{(1-z^2)(1+3z^2)}$$

$$A=0 \Leftarrow 0 = \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^r} f\left(\frac{1}{z}\right) \right) \text{ در } z=0 \text{ تکین است بنابراین}$$

$$2) B = \oint_{|z|=r} \cos\left(\frac{1}{z}\right) \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) dz$$

$$f(z) = \cos \frac{1}{z} \sin \frac{1}{z-1} \Rightarrow \frac{1}{z^r} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^r} \cos z \sin \frac{z}{1-z} \Rightarrow z=0 \text{ قطب ساده است}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^r} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{1}{z^r} \cos z \sin \frac{z}{1-z} = 1 \Rightarrow B = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^r} f\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi i$$

لذا در نقطه تکین $z=1$ در داخل مسیر قرار دارد، چون محاسبه مستقیم مانده در $z=1$ دشوار است، ابتدا مجموع مانده ها را با قضیه فرعی در دست آوریم و سپس حاصل را از مانده در قطب $z=3$ کم می کنیم. (قطب مرتبه ۴)

$$3) C = \oint_{|z|=r} \frac{z^2 dz}{(z-1)^4 (z-3)}$$

$$\frac{1}{z^r} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{(1-z)^4 (1-3z)z} \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^r} f\left(\frac{1}{z}\right) \right) = 1 \rightarrow \text{مجموع مانده ها}$$

$$\operatorname{Res}_{z=3} f(z) = \left(\frac{3}{r}\right)^2 = 8,0428 \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 1 - 8,0428 = -7,0428 \Rightarrow C = -2\pi i (\operatorname{Res}_{z=1} f(z)) \approx 17\pi i$$

← عکس مشابه

۳۴

✓ تعمیم قضیه اصلی مانده ها ۱

فرض کنیم C خم ساده بسته در جهت مثبت باشد. اگر f در درون C به جز در تعدادی نقاط z_k ($k=1, 2, \dots, n$) تکیه کرده و روی مرز C نیز به جز در نقاط p_k ($k=1, 2, \dots, m$) که هیچ قطبهای ساده f و ساده f تکیه نداشته باشد، آنگاه به شرط آنکه C در نقاط p_k معکوس باشد داریم:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) + \pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z=p_k} f(z)$$

مثال ۱: محاسبه انتگرالهای زیر را ببینید.

۱) $A = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z(z-1)} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \pi i \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi i(-1) + \pi i(1) = -\pi i$

۲) $B = \oint_{|z-\pi/4|=\pi/4} \frac{dz}{\sin z \cos z} = ? \Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sin z \cos z} = \frac{2}{\sin 2z} \Rightarrow$
 از این تابع $z=0, z=\pi, z=2\pi, \dots$ روی C و $z=\pi/4$ داخل C می باشد.

$\Rightarrow B = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\pi/4} \frac{2}{\sin 2z} + \pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} \frac{2}{\sin 2z} + \operatorname{Res}_{z=\pi} \frac{2}{\sin 2z} \right) =$

$2\pi i \left(\frac{2}{2 \cos(\pi/2)} \right) + \pi i \left(\frac{2}{2 \cos 0} + \frac{2}{2 \cos 2\pi} \right) = -2\pi i + 2\pi i = 0$

۳) $C = \oint_{|z|=\pi/4} \frac{\tanh z}{z+\pi/4} dz = ? \Rightarrow f(z) = \frac{\sinh z}{(z+\pi/4) \cosh z} \Rightarrow$
 از این تابع $z=0 \Rightarrow z = (n-\frac{1}{4})\pi i$
 و $z+\pi/4=0 \Rightarrow z=-\pi/4$
 از این تابع $z=-\pi/4, z=\pi/4, z=-3\pi/4, \dots$ روی مرز C قرار دارند و داخل C فقط یکی از آنها می باشد.

$\Rightarrow C = \pi i \left(\operatorname{Res}_{z=-\pi/4} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\pi/4} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-3\pi/4} f(z) \right) =$

$- \pi i \tanh \frac{\pi}{4} + \pi i$

$\pi i \left(\frac{\sinh(-\pi/4)}{\cosh(-\pi/4)} + \frac{\sinh(\pi/4)}{\cosh(\pi/4) + \frac{\pi}{4}(1-i)\sinh \pi/4} + \frac{\sinh(-3\pi/4)}{\cosh(-\pi/4) + \frac{\pi}{4}(1-i)\sinh(-\pi/4)} \right) =$

✓ کاربرد مانده ها در محاسبه انتگرال های حقیقی

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، انتگرال نامرئی تابع پیوسته $f(x)$ بر بازه $x \geq 0$ م بصورت زیر تعریف می شود:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx$$

وقتی حد عبارت سمت راست موجود باشد گویند انتگرال نامرئی $\int_0^{\infty} f(x) dx$ حد همگرا است.

همچنین انتگرال نامرئی تابع پیوسته $f(x)$ در بازه $-\infty < x < \infty$ چنین تعریف می شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} f(x) dx$$

فقط در صورتی که هر دو حد موجود باشند، انتگرال همگرا خواهد بود.

① انتگرال های حقیقی نوع اول

اگر اختلاف درم خروج و صورت عددی زوج و مثبت باشد

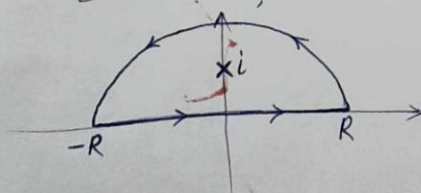
$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \left(\text{در نقاط یکین موجود در نیم صفحه بالایی} \right) \frac{P(z)}{q(z)}$$

شرط همگرایی I_1 آن است که درم خروج بسط لزا واحد از درم صورت بسط باشد. همچنین $q(x)$ هیچ صفر حقیقی ندارد.

مثال: حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = ?$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad \text{نقاط یکین آن } z = \pm i \text{ بود که تنها } z = i \text{ در نیم صفحه بالایی قرار دارد.}$$



$$A = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2 + 1} = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} \right) = \pi$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = ? \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^4 + 1} \Rightarrow z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z^4 = -1 = 1e^{i\pi} \Rightarrow$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

نقاط یکین
نیم صفحه بالایی

۳۴

$$B = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=e^{\frac{i\pi}{2}}} \frac{1}{z^2+1} + \operatorname{Res}_{z=e^{\frac{i3\pi}{2}}} \frac{1}{z^2+1} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{\varepsilon z^3} \Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{2}}} + \frac{1}{\varepsilon z^3} \Big|_{z=e^{\frac{i3\pi}{2}}} \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{\varepsilon e^{\frac{i\pi}{2}}} + \frac{1}{\varepsilon e^{\frac{i3\pi}{2}}} \right) = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon(-1+i)} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon(1+i)} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} \pi i \left(\frac{1-i}{-1} \right) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} \pi$$

$$C = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = ? \rightarrow z=i \quad (\text{قطب مرتبه ۲})$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2} \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right)'$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$D = \int_0^\infty \frac{x^2-1}{x^4+\delta x^2+\varepsilon} dx = ? \rightarrow z^2+\delta z^2+\varepsilon=0 \Rightarrow (z^2+1)(z^2+\varepsilon)=0 \Rightarrow z=\pm i, \pm \sqrt{\varepsilon}i$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2-1}{x^4+\delta x^2+\varepsilon} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2+\varepsilon)} dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\sqrt{\varepsilon}i} f(z) \right) =$$

$$2\pi i \left(\frac{-2}{(i)(1)} + \frac{-\delta}{(-\sqrt{\varepsilon})(\sqrt{\varepsilon}i)} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow D = \frac{\pi}{12}$$

در انتگرال‌های حقیقی نوع اول اگر اختلاف درمخرج و صورت عددی فرد باشد، روشی نامیده می‌شود که به آن خواص می‌گویند.

(۲) انتگرال‌های حقیقی نوع دوم

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{p(x)}{q(x)} \ln x dx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{p(x)}{q(x)} \arctan x dx$$

این نوع انتگرال‌ها دارای فرم‌های $\int_{-\infty}^\infty \frac{p(x)}{q(x)} \arctan x dx$ و $\int_{-\infty}^\infty \frac{p(x)}{q(x)} \ln x dx$ که درجه $q(x)$ از $p(x)$ بیشتر مرتبه نباشد، و $q(x)$ هیچ صفر حقیقی نداشته باشد.

(۳۷)

$$I_P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos ax \, dx = \operatorname{Re} \left[\begin{aligned} & 2\pi i \left(\text{مجموع مانده‌های } f(z)e^{iaz} \text{ در نقاط تکیه نیم صفحه بالایی صفر حلقه} \right) \\ & + \pi i \left(\text{مجموع مانده‌های } f(z)e^{iaz} \text{ در نقاط تکیه روی محور حقیقی} \right) \end{aligned} \right]$$

$$I_P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin ax \, dx = \operatorname{Im} \left[\dots \right]$$

که در روابط بالا $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ است. شرط همگرایی انتگرال‌های فوق این است که در $q(x)$ از درجه $p(x)$ بیشتر باشد. همچنین $q(x)$ نباید صفر حقیقی داشته باشد. در صورت وجود صفر حقیقی برای $q(x)$ ، باید صفر ساده بوده و نسبت اول.

نکته: در صفرهای $\cos ax$ و $\sin ax$ باشد.

مثال:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} \, dx = ?$$

$$A = \operatorname{Im} \left(2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} \right) = \operatorname{Im} \left(2\pi i \frac{ie^{-1}}{2i} \right) = \pi e^{-1}$$

$$B = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = ?$$

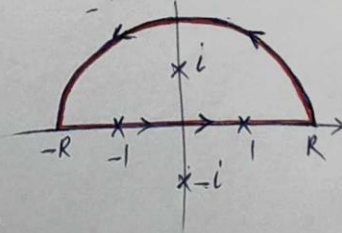
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \operatorname{Im} \left(\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} \right) = \pi \Rightarrow B = \frac{\pi}{2}$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^2 - 1} \, dx = ? \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$$

$$C = \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{i\pi z}}{(z^2-1)(z^2+1)} + \pi i \left(\operatorname{Res}_{z=1} \frac{e^{i\pi z}}{(z^2-1)(z^2+1)} + \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{e^{i\pi z}}{(z^2-1)(z^2+1)} \right) \right) =$$

$$\operatorname{Re} \left(2\pi i \frac{e^{-\pi}}{-2i} + \pi i \left(\frac{-1}{2} + \frac{-1}{-2} \right) \right) = -\frac{1}{2} \pi e^{-\pi}$$

نقاط تکیه (همگی ساده)
 $z = \pm 1$ ،
 نیم صفحه بالایی
 روی محور حقیقی



این نوع انتگرال ها به فرم $\int_0^{2\pi} F(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ می باشد که با تغییر متغیر $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) خواهیم داشت:

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

در این صورت انتگرال بالا به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\oint_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

که در آن C دایره واحد به مرکز مبدأ بوده و در جهت مثبت پیموده می شود.

در حالت کلی با تغییر متغیر $z = e^{i\theta}$ ، $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ و $\sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$ خواهیم بود.

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta} = ? = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(2 + \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right)} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 4iz - 1}$$

از این دو نقطه $z_1 = (-2 + \sqrt{3})i$ و $z_2 = (-2 - \sqrt{3})i$ درون دایره واحد قرار دارد.

$$z^2 + 4iz - 1 = 0 \Rightarrow z_1, z_2 = (-2 \pm \sqrt{3})i$$

$$A = 2\pi i \operatorname{Res}_{z = (-2 + \sqrt{3})i} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} = 2\pi i \left(\frac{2}{2z + 4i} \right) \Big|_{z = (-2 + \sqrt{3})i} = \frac{2\pi i}{-2i + 2\sqrt{3}i + 4i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{-1 + 2\cos \theta} = ? = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{-1 + 1 + 2\cos \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\cos \theta} =$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(\frac{1}{2} (z + z^{-1}) \right)} = \oint_{|z|=1} \frac{-2iz dz}{z^2 + 1} \Rightarrow \frac{2}{z^2 + 1} \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}, e^{i\frac{5\pi}{2}}, e^{i\frac{7\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow B = \pi i \left(\operatorname{Res}_{z = e^{i\frac{\pi}{2}}} f(z) + \operatorname{Res}_{z = e^{i\frac{3\pi}{2}}} f(z) + \operatorname{Res}_{z = e^{i\frac{5\pi}{2}}} f(z) + \operatorname{Res}_{z = e^{i\frac{7\pi}{2}}} f(z) \right) =$$

$$\pi i (-2i) \left(\frac{1}{2} \right) \left(e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{3\pi}{2}} + e^{-i\frac{5\pi}{2}} + e^{-i\frac{7\pi}{2}} \right) =$$

$$\frac{\pi}{2} (-i + i - i + i) = 0$$

فصل چهارم: سری های فوریه

فرض کنید $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد. گوئیم تابع $f(x)$ دارای شرایط در یکم است هرگاه دلری ۳ شرایط زیر باشد:

$$\int_0^T |f(x)| dx < \infty$$

۱- روی یک دوره تناوب مطلقاً انتگرال پذیر باشد یعنی:

۲- در یک دوره تناوب تعداد ماکزیمم ها و منیمم های $f(x)$ متناهی باشد.

۳- در یک دوره تناوب تعداد ناپوستگی $f(x)$ متناهی باشد.

اکثر تابعی دارای شرایط در یکم باشد. دلری سری فوریه متناهی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

که ضرایب a_n و b_n از روابط زیر بدست می آید:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos n\omega_0 x dx \quad , \quad n=0, 1, 2, \dots \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$$

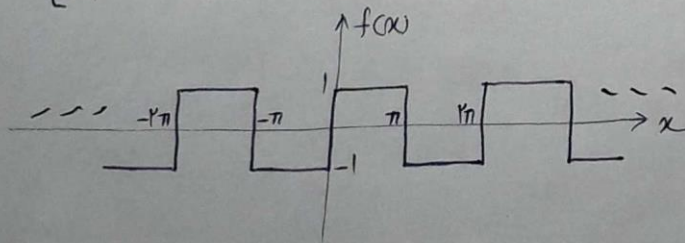
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin n\omega_0 x dx \quad , \quad n=1, 2, \dots$$

مقدار متوسط یا مقدار dc تابع $f(x)$

نکته: شرایط در یکم، شرایط کافی برای وجود سری فوریه هستند نه شرایط لازم. به عبارت دیگر ممکن است $f(x)$ تابع متناوبی باشد که در شرایط در یکم صدق نکند اما دلری سری فوریه باشد.

مثال: سری فوریه توابع زیر را بدست آورید.

$$1) f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \quad ; \quad T = 2\pi \quad \rightarrow \quad \text{بالس مربعی}$$



(۴۰)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = 0 \quad ; \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -\sin nx \, dx + \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right) =$$

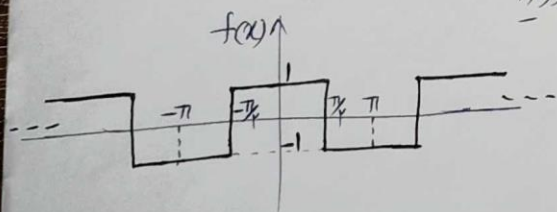
$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi - \cos n\pi + 1) = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$= \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{if } n \text{ is odd} \\ 0 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

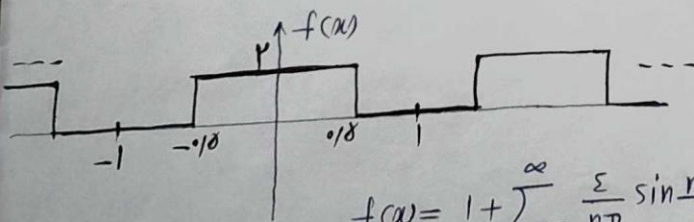
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin nx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

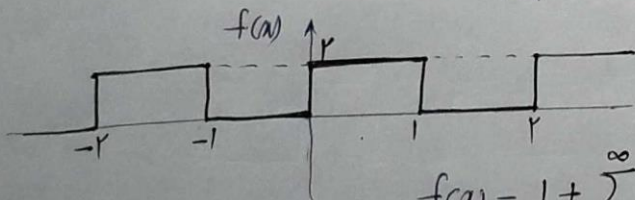
به عنوان تمرین: سری فوریه تابع مربع زیر را بسازید.



$$f(x) = \frac{2}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \dots \right)$$



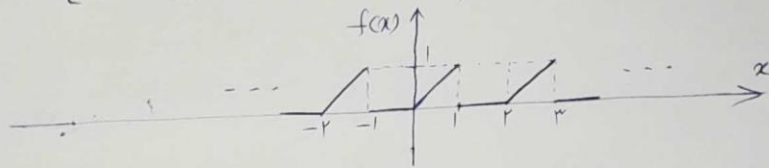
$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n\pi} \cos n\pi x$$



$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin n\pi x$$

(F1)

$$r) f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < 2 \end{cases}; T=2 \quad (f(x+2)=f(x))$$



$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) \cos n\pi x dx = \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \left(\frac{1}{n\pi} x \sin n\pi x + \left(\frac{1}{n\pi} \right)^2 \cos n\pi x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{n\pi} \right)^2 ((-1)^n - 1)$$

روشن خبری:

x	$\cos n\pi x$
1	$\frac{1}{n\pi} \sin n\pi x$
0	$-\left(\frac{1}{n\pi} \right)^2 \cos n\pi x$

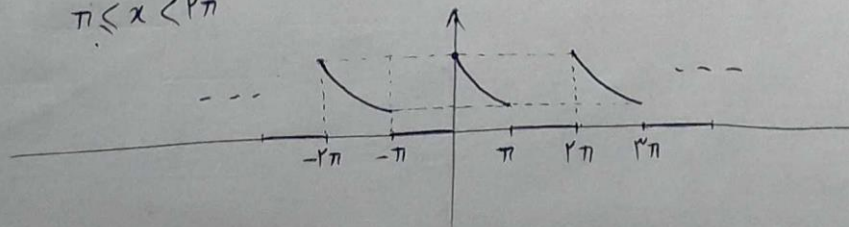
$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) \sin n\pi x dx = \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \left(-\frac{1}{n\pi} x \cos n\pi x + \left(\frac{1}{n\pi} \right)^2 \sin n\pi x \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi} (-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

x	$\sin n\pi x$
1	$-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x$
0	$-\left(\frac{1}{n\pi} \right)^2 \sin n\pi x$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} \right)^2 ((-1)^n - 1) \cos n\pi x + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi x$$

$$r) f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}; T=2\pi$$



$$(F2) \quad a_n = \frac{r}{r\pi} \int_0^{r\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \cos nx \, dx = ?$$

$$\begin{array}{r|l} -x & \cos nx \\ e & + \\ -x & -\frac{1}{n} \sin nx \\ -e & - \\ -x & -\frac{1}{n^2} \cos nx \\ e & + \end{array}$$

$$\int e^{-x} \cos nx \, dx = \frac{1}{n} e^{-x} \sin nx - \frac{1}{n^2} e^{-x} \cos nx - \int \frac{1}{n^2} e^{-x} \cos nx \, dx$$

$$\int e^{-x} \cos nx \, dx = \frac{1}{n^2+1} e^{-x} (n \sin nx - \cos nx)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi(n^2+1)} e^{-x} (n \sin nx - \cos nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi(n^2+1)} (e^{-\pi} (-1)^{n+1} + 1)$$

$$b_n = \frac{r}{r\pi} \int_0^{r\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \sin nx \, dx = ?$$

$$\begin{array}{r|l} -x & \sin nx \\ e & + \\ -x & -\frac{1}{n} \cos nx \\ -e & - \\ -x & -\frac{1}{n^2} \sin nx \\ e & + \end{array}$$

$$\int e^{-x} \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} e^{-x} \cos nx - \frac{1}{n^2} e^{-x} \sin nx - \int \frac{1}{n^2} e^{-x} \sin nx \, dx$$

$$\int e^{-x} \sin nx \, dx = \frac{-1}{n^2+1} e^{-x} (n \cos nx + \sin nx)$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{-1}{\pi(n^2+1)} e^{-x} (n \cos nx + \sin nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{\pi(n^2+1)} (n e^{-\pi} (-1)^n - n) = \frac{n}{\pi(n^2+1)} (1 + e^{-\pi} (-1)^{n+1})$$

$$\frac{a_0}{r} = \frac{1}{r} \int_0^T f(x) \, dx = \frac{1}{r\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \, dx = \frac{1}{r\pi} (1 - e^{-\pi})$$

با توجه به اینکه سری فوریه $f(x)$ را داریم، پس:

$$f(x) = \frac{1-e^{-\pi}}{r\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+e^{-\pi} (-1)^{n+1}}{\pi(n^2+1)} (\cos nx + n \sin nx)$$

۱۴

فصل پنجم: معادلات با مشتقات جزئی

معادلات با مشتقات جزئی در ارتباط با مسائل گوناگون فیزیکی و هندسی که شامل توابع چند متغیره می باشد مطرح می شود.

✓ مفاهیم بنیادی

- تعریف معادله با مشتقات جزئی: معادله ای شامل یک یا چند مشتقات جزئی یک تابع مجهول از دو یا چند متغیر مستقل به معادله با مشتقات جزئی موسوم است. مرتبه بالاترین مشتق را مرتبه معادله می نامند. همانند معادلات دیفرانسیل معمولی، یک معادله با مشتقات جزئی را خطی گوئیم هرگاه نسبت به متغیر وابسته و مشتقات آن از درجه اول باشد. یک معادله خطی ممکن است هرگاه هر جمله آن شامل تابع یا یکی از مشتقات آن جزئی معادله ای که ممکن نباشد به معادله ناممکن موسوم است.

✓ قضیه بنیادی ۱ (اصل خطی بودن یا برعکس):

هرگاه u_1 و u_2 دو جواب معادله با مشتقات جزئی ممکن خطی در ناحیه R باشند، آنگاه $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ که در آن c_1 و c_2 ثابت های دلخواه هستند نیز جواب معادله در ناحیه R است.

مثال: جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{xx} - u = 0$ یعنی $u(x, y)$ با y وابسته.

$$s^2 - 1 = 0 \Rightarrow s = \pm 1 \Rightarrow u(x, y) = A(y) e^x + B(y) e^{-x} \quad \text{جواب:}$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $u_{xy} = -u_x$

انتگرال نسبت به y $\Rightarrow \frac{p_y}{p} = -1 \Rightarrow \ln p = -y + C(x) \Rightarrow p = d(x) e^{-y}$

$\Rightarrow u_x = d(x) e^{-y} \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{انتگرال گیری}} u(x, y) = f(x) e^{-y} + g(y)$

که در آن $f(x) = \int d(x) dx$ می باشد.

(FF)

$$1) u_{xx} = 0$$

$$u_x = p \Rightarrow p_x = 0 \Rightarrow p(x, y) = f(y) \Rightarrow u_x = f(y) \Rightarrow u(x, y) = x \cdot f(y) + g(y)$$

$$2) u_{xy} = 0$$

$$u_x = p \Rightarrow p_y = 0 \Rightarrow p(x, y) = f(x) \Rightarrow u_x = f(x) \Rightarrow u(x, y) = k(x) + g(y)$$

✓ مدل سازی نخ مرتعش با معادله دیراکسل جزئی

در این قسمت ارتعاشات عرضی کوپک نخ کشسان به طول L که دو انتهای آن ثابت و بدون حرکت است مانند ارتعاش یک تار ویولن را مورد بررسی قرار می دهیم. برای رسیدن به معادله ارتعاش نخ مورد نظر فرض کنیم نخ از موضع تعادل خارج شده و سپس در لحظه $t=0$ رها شده و به ارتعاش در آید. مسئله مشخص کردن ارتعاش نخ، یعنی تعیین $u(x, t)$ ، انحراف نخ در یک نقطه دلخواه x و در لحظه دلخواه t می باشد.

معادله حکم بر ارتعاش نخ یک معادله با مشتق جزئی بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

که به معادله موج یک بعدی موسوم است

برای حل این معادله از روش جداسازی متغیرها یا روش فوری استفاده می کنیم. برای معادله $u(x, t)$ انحراف نخ در لحظه t می باشد، با توجه به اینکه در نقاط انتهایی یعنی $x=0$ ، $x=L$ نخ ثابت نگه داشته شده است، به ازای هر t دو شرط کرانه ای $u(0, t)=0$ ، $u(L, t)=0$ را داریم. مسیر حرکت نخ به انحراف اولیه $u(x, 0)$ در لحظه $t=0$ و سرعت اولیه $g(x)$ بستگی دارد، لذا دو شرط اولیه زیر را داریم:

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$$

حالا معادله موج را طوری می بینیم که در شرایط کرانه ای و اولیه صدق کند.

- حل معادله از روش جداسازی متغیرها: فرض می کنیم جواب معادله بصورت زیر باشد:

$$u(x, t) = F(x) \cdot G(t)$$

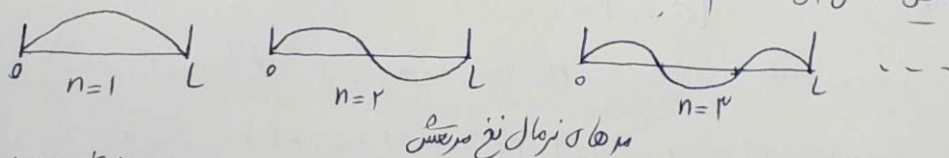
ط معادله (۲):

$$K = -p'' = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} G'' + \lambda_n^2 G = 0 \\ \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \end{cases} \rightarrow G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t$$

$$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x ; n = 1, 2, \dots$$

این تابع را تابع مستقیم و برگرد و مقادیر λ_n را مقادیر مستقیم و برگرد می نامند.

مجموعه $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ را طیف می نامند. هر u_n حرکت همساز با فرکانس $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2L}$ شکل بر واحد زمان را نمایش می دهد. این حرکت را مد نرمال n ام نیز می نامند. مد نرمال اول ($n=1$) به مد اساسی مستقیم است. از مد پایه موسیقی حاصل می شود که م می نامند.



با استفاده از اصل برهم نهی

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

در اینجا صدق کردن مکان اول و سرعت اول را بررسی می کنیم:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x) \text{ مکان اول} \Rightarrow B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

B_n برابر ضریب سینوسی فوریه تابع $f(x)$ می باشد.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi}{L} x = g(x) \text{ سرعت اول} \Rightarrow B_n^* = \frac{1}{\lambda_n} \times \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

اگر سرعت اول $g(x)$ برابر صفر باشد داریم $B_n^* = 0$ و ضرایب معادله موج بصورت زیر خواهد بود:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x ; \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

مثال: با فرض $L = \pi$ ، $c = 1$ ، سرعت اول صفر و تغییر مکان اول برابر $0.02 \sin x$ ، معادله تغییر مکان نیز مرتس را باید.

(FV)

مثال: به روش جداسازی متغیرها جواب معادلات زیر را بیابید.

a) $u_x + u_y = 0$

$u(x,y) = F(x) \cdot g(y) \rightarrow F'g + Fg' = 0 \Rightarrow \frac{F'}{F} = -\frac{g'}{g}$ تعداد حالتی امکان پذیر است که دو طرف برابر عدد باشد

$$\begin{cases} \frac{F'}{F} = k \rightarrow F' - kF = 0 \rightarrow F(x) = A e^{kx} \\ -\frac{g'}{g} = k \rightarrow g' + kg = 0 \rightarrow g(y) = B e^{-ky} \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = A e^{kx} \cdot B e^{-ky} = C \cdot e^{kx - ky}$$

b) $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u(x,y) = F(x) \cdot g(y) \rightarrow F''g + Fg'' = 0 \Rightarrow \frac{F''}{F} = -\frac{g''}{g} = k \Rightarrow$

$$\begin{cases} F'' - kF = 0 \Rightarrow F(x) = A e^{\sqrt{k}x} + B e^{-\sqrt{k}x} \\ g'' + kg = 0 \Rightarrow g(y) = C \cos \sqrt{k}y + D \sin \sqrt{k}y \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = F(x) \cdot g(y)$$

✓ انواع معادلات با مشتقات جزئی خطی

معادله با مشتق جزئی زیر را در نظر بگیرید:

$$A \cdot u_{xx} + 2B \cdot u_{xy} + C \cdot u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$$

این معادله را به یکی از انواع سه گانه دسته بندی می کنند $AC - B^2 > 0$ مانند معادله لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$

همچنین گویا که به سه گانه دسته بندی می کنند $AC - B^2 = 0$ $u_t = c^2 u_{xx}$ گرما

هذلولی گویا که به سه گانه دسته بندی می کنند $AC - B^2 < 0$ $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ موج

A, B, C تابعی از x, y هستند.

اگر معادله از نوع هذلولی گویا باشد، با تغییر متغیر $\begin{cases} v = y - k_1 x \\ z = y - k_2 x \end{cases}$

که در آن k_1 و k_2 جواب های معادله $A \cdot k^2 - 2B \cdot k + C = 0$ می باشد، با اعمال این تغییر متغیر

معادله به صورت نرمال $u_{vz} = F(v,z,u,u_v,u_z)$ تبدیل می شود، به عنوان مثال برای معادله موج داریم:

$$A=1, B=0, C=-c^2 \Rightarrow k^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = c \\ k_2 = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = y + cx - ct \\ z = y - cx + ct \end{cases}$$

~~$$k_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, k_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$~~

$$k_1 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{A}, k_2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{A}$$

اگر معادله از نوع سهمی گونه باشد، با تغییر متغیر کردیم $z = y - \frac{B}{A}x$, $v = x$ معادله می‌شود $u_{vv} = F^*(v, z, u, u_v, u_z)$ در صورتی که

اگر معادله از نوع بیضی باشد، با تغییر متغیرهای $z = \frac{Ay - Bx}{\sqrt{AC - B^2}}$, $v = x$ معادله می‌شود $u_{vv} + u_{zz} = F^*(\dots)$ در صورتی که

مایل و معادله زیر را حل کنید.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

$$\begin{cases} AC - B^2 = 0 \rightarrow \text{سهمی گونه} \rightarrow \begin{cases} v = x \\ z = y - x \end{cases} \rightarrow u_x = u_v \cdot v_x + u_z \cdot z_x = u_v - u_z \end{cases}$$

$$u_v - u_z \Rightarrow u_{xx} = \frac{\partial}{\partial v}(u_x) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}(u_x) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$(u_{vv} - u_{zv}) \times 1 + (u_{vz} - u_{zz}) \times (-1) = u_{vv} + u_{zz} - u_{zv} - u_{vz}$$

$$u_y = u_v \cdot v_y + u_z \cdot z_y = u_z \Rightarrow u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = u_{zz}$$

$$u_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = u_{vz} - u_{zz}$$

$$\Rightarrow u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \Rightarrow u_{vv} + u_{zz} - u_{zv} - u_{vz} + 2u_{vz} - 2u_{zz} + u_{zz} = 0$$

$$\Rightarrow u_{vv} = 0 \Rightarrow u_v = f(z) \Rightarrow u_x = f(z)$$

$$u(x, y) = x \cdot f(y - x) + g(y - x)$$

$$u_v = f(z) \Rightarrow u(v, z) = v f(z) + g(z) \Rightarrow u(x, y) = x \cdot f(y - x) + g(y - x)$$

(FA)

(۴۹)

✓ حل معادله گرما

معادله گرما بصورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \quad ; \quad c^2 = \frac{k}{\rho p}$$

که در آن $u(x, y, z, t)$ دمای درون جسم، c^2 ضریب نفوذ، k رسانایی گرمایی، ρ گرمایی ویژه و p چگالی جسم است. $\nabla^2 u$ لاپلاسین u بوده و در مختصات کارتزین بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

به عنوان کاربرد مهم، دمای یک میل نانوکابل با سیم را که مقطع عرضی آن ثابت و همگن است، در طول محور x که متکرر دارد، مورد مطالعه متکرر می‌دهیم. همیشه فرض می‌کنیم سطح جانبی میل به طور کامل عایق شده است، به طوری که گرما تنها در جهت x جریان می‌یابد. در اینصورت u تابع از x و t خواهد بود و معادله گرمایی یک بعدی بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

فرض می‌کنیم دمای نقاط انتهایی میل صفر باشد:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$

اگر دمای اولیه میل تابع $f(x)$ فرض شود خواهیم داشت:

$$u(x, 0) = f(x)$$

لذا روش جداسازی متغیرها برای حل این معادله استفاده می‌کنیم:

$$u(x, t) = F(x) \cdot G(t) \Rightarrow F \cdot \dot{G} = c^2 F'' \cdot G \Rightarrow \frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2$$

مقدار ثابت منفی

$$\Rightarrow \int F'' + p^2 F = 0 \rightarrow F(x) = A \cos px + B \sin px$$

$$\begin{cases} \dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \\ u(0, t) = 0 \rightarrow A = 0 \\ u(L, t) = 0 \rightarrow B \sin pL = 0 \Rightarrow pL = n\pi \Rightarrow p = \frac{n\pi}{L} \end{cases}$$

با فرض $B \neq 0$

$$\Rightarrow F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow u_n(x, t) = F_n(x) \cdot G_n(t) =$$

$$\begin{cases} \dot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \Rightarrow G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \\ \lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \quad \text{مقادیر ویژه} \end{cases}$$

$$B_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot e^{-\lambda_n^2 t} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x e^{-\lambda_n^2 t} ; \lambda_n = \frac{c n \pi}{L}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x) \Rightarrow B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx ; n=1,2,\dots$$

مثال: یک میل عایق پوسش سرد مسی به طول ۱۰ سانتی متر که در دمای اولیه $100 \sin \frac{\pi x}{10}$ درجه سانتیگراد و دماهای آن در 0° دانه شده است را محاسبه کنید. در مدتی طولانی که دمای آن میل به 0° نزدیک شود.

داده های فیزیکی میل: $\rho = 1192 \frac{gm}{cm^3}$ ، $c_p = 0.92 \frac{cal}{gm \cdot ^\circ C}$ ، $k = 0.98 \frac{cal}{cm \cdot sec \cdot ^\circ C}$ ، رسانایی گرمایی

$$\frac{cal}{cm \cdot sec \cdot ^\circ C}$$

حل: با توجه به شرایط اولیه داریم:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x) = 100 \sin \frac{\pi x}{10} \Rightarrow B_1 = 100, B_2 = B_3 = \dots = 0$$

$$c^2 = \frac{k}{\rho \cdot c_p} = \frac{0.98}{0.92 \times 1192} = 1188 \frac{cm^2}{sec} \Rightarrow \lambda_1^2 = \frac{c^2 \pi^2}{L^2} = \frac{1188 \pi^2}{400} = 0.001188 \frac{1}{sec}$$

$$u(x,t) = 100 \sin \frac{\pi x}{10} e^{-0.001188 t} \Rightarrow 100 e^{-0.001188 t} = 80 \Rightarrow t = 381 \approx 48 \text{ دقیقه}$$

تقریب: میل قبل را در حالتی که دمای اولیه برابر $100 \sin \frac{\pi x}{10}$ باشد محاسبه کنید.

✓ حل معادله گرما در حالتی که دماهای میل عایق پوسش سرد باشد

از آنجایی که میل گرما با گرادیان دما متناسب است، هرگاه دماهای میل عایق پوسش سرد باشد، بهرجه هیچگونه گرما نمیتواند از دماهای عبور کند، گرما که از آن برای هر t بصورت زیر در می آید:

$$u_x(0,t) = 0, u_x(L,t) = 0$$

$$u(x,t) = F(x) G(t) \Rightarrow u_x(0,t) = F'(0) G(t) = 0, u_x(L,t) = F'(L) G(t) = 0$$

$$\Rightarrow F'(x) = -A p \sin p x + B p \cos p x \rightarrow \begin{cases} F'(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ F'(L) = 0 \Rightarrow pL = n\pi \Rightarrow p = \frac{n\pi}{L} ; n=0,1,2,\dots \end{cases}$$

$$\textcircled{51} \quad F_n(x) = \cos \frac{n\pi}{L} x ; n=0,1,2,\dots$$

بفرض $B=0, A=1$

$$u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi}{L} x e^{-\lambda_n^2 t} ; n=0,1,2,\dots, \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{L} x e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{L} x = f(x) \Rightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \\ A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx ; n=1,2,\dots \end{cases}$$